TU Clausthal
Institut für Mathematik

Thomas Hanschke

Stochastik III

Prof. Dr. Thomas Hanschke
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal

1. Auflage 2008

Autor:	Prof. Dr. Thomas Hanschke
	(E-Mail: Hanschke@math.tu-clausthal.de)
Mitarbeit:	Dr. Michael Mederer
	Hendrik Baumann
	(E-Mail: hendrik.baumann@tu-clausthal.de)
	Alexander Herzog
	(E-Mail: Herzog@math.tu-clausthal.de)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Vorwort

An der Technischen Universität Clausthal sind die Vorlesungen Stochastik III und IV bzw. Angewandte Stochastische Prozesse I und II Bestandteile der neuen Master-Studiengänge Angewandte Mathematik und Operations Research. Im Fokus stehen die Markovschen Prozesse und ihre Verallgemeinerungen (Semi-Markovprozesse und semi-regenerative Prozese). Für das Verständnis vorausgesetzt werden Grundkenntnisse in Wahrscheinlichkeitstheorie, wie sie an der TU Clausthal in den Vorlesungen Stochastik I und II vermittelt werden.

In der Vorlesung Stochastik III bzw. Angewandte Stochastische Prozesse I werden allgemeine Methoden zur Analyse stochastischer Prozesse bereitgestellt, die später auf konkrete Fragestellungen z.B. in der Warteschlangen- oder der Risikotheorie angewandt werden sollen. Da die Berechnungen von Kenngrößen von Markovprozessen und ihren Verallgemeinerungen häufig auf die Lösung von Differenzen- und Differentialgleichungen hinauslaufen, werden im Anhang einige grundsätzliche damit zusammenhängende Vorgehensweisen erläutert.

Das Skriptum Stochastik III ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich an den Universitäten Mainz, Kaiserslautern und Clausthal abgehalten habe. Bei der Zusammenstellung und Ausgestaltung des Lehrstoffs haben mich mein ehemaliger Mitarbeiter Dr. Michael Mederer und sein Nachfolger Dipl. Math. Hendrik Baumann tatkräftig unterstützt. Korrektur gelesen hat außerdem Dipl. Math. Alexander Herzog. Ihnen allen möchte ich hiermit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

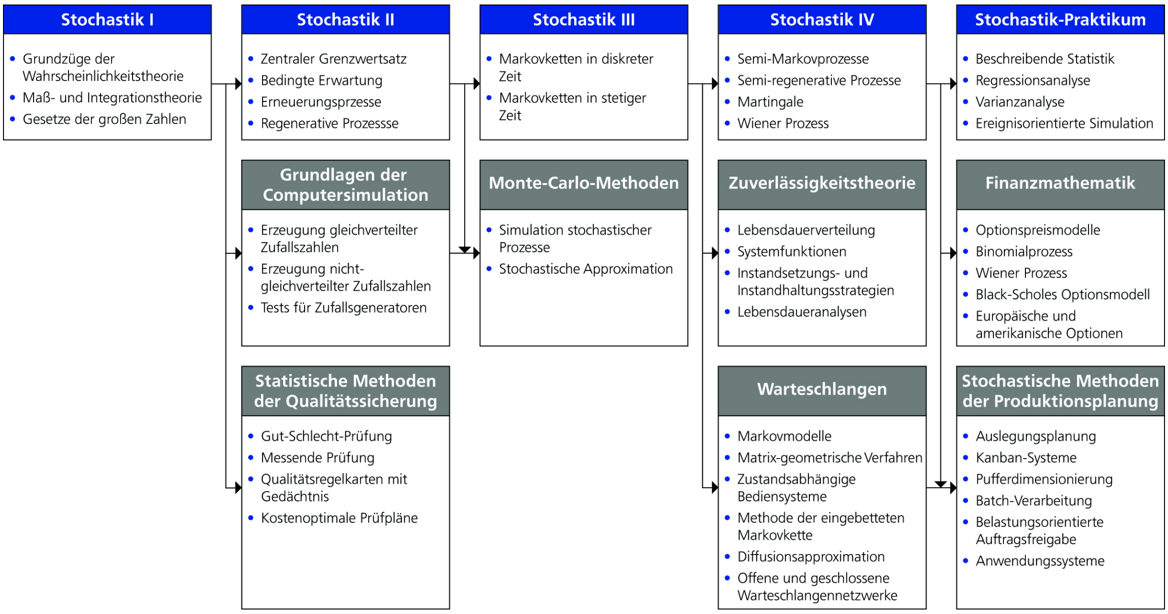
Dank der finanziellen Unterstützung durch die ELAN-Initiative des Landes Niedersachsen (elearning academic network Niedersachsen) steht dieses Skriptum auch als Online-Version zur Verfügung:

http://www.stochastik.tu-clausthal.de/Stochastik3Skript/

Thomas Hanschke Clausthal, August 2008

0.1 Mit der Stochastik III zusammenhängende Vorlesungen

Die Stochastik III Vorlesung ist Bestandteil einer Reihe aufeinander aufbauender Veranstaltungen, die man der nachstehenden Grafik entnehmen kann.



(Siehe auch PowerPoint-Präsentation zum Stochastik–Vorlesungsplan.)

Kapitel 21

Markovketten in diskreter Zeit

In diesem Kapitel werden Markovketten in diskreter Zeit behandelt. Sehr viele praktische Fragestellungen lassen sich als Markovketten in diskreter oder stetiger Zeit modellieren. Markovketten treten aber auch eingebettet in anderen Prozessen auf und bieten somit eine Handhabe zur Analyse allgemeinerer Prozesse. In diesem Kapitel werden Methoden zur Berechnung der endlich-dimensionalen Verteilungen und der Grenzverteilungen von Markovketten behandelt.

Schlüsselwörter: Homogene Markovkette, Markov–Eigenschaft, Übergangswahrscheinlichkeit, (gegenseitige) Erreichbarkeit, Irreduzibilität, Rekurrenz, Transienz, Grenzverteilung, Absorptionswahrscheinlichkeit, Aussterbewahrscheinlichkeit, periodische Markovketten, Ergodensätze.

21.1 Homogene Markovketten

Markovketten stellen ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung stochastischer Prozesse dar. Sie verallgemeinern das von der Exponentialverteilung her bekannte Phänomen der Gedächtnislosigkeit auf Folgen von Zufallsvariablen.

21.1 Definition (Markovkette):
Ein stochastischer Prozess $(\Omega, \mathfrak{A}, P, (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ *mit Werten in einem abzählbaren Zustandsraum* E *heißt* <u>*Markovkette*</u>*, wenn für alle Zeitpunkte* $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ *und Zustände* $i_0, \ldots, i_{n+1}$

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n) \qquad (21.1)$$

erfüllt ist.

21.2 Bemerkung (Markov–Eigenschaft, homogene Markovketten):

- Die Eigenschaft (21.1), die auch (elementare) <u>Markov–Eigenschaft</u> genannt wird, besagt, dass in jedem Zeitschritt die Wahrscheinlichkeit für den neuen Zustand nur vom letzten Zustand, nicht aber von der Vorgeschichte des Prozesses abhängt. Aus diesem Grund werden Markovketten auch als stochastische Prozesse ohne Gedächtnis bezeichnet.
- Aus (21.1) folgt insbesondere:
$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$
- In diesem Kapitel werden ausschließlich solche Markovketten behandelt, bei denen die <u>Übergangswahrscheinlichkeiten</u>
$$P_{ij} := P_{ij}^{(1)} := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$
nicht von n abhängen (sogenannte <u>homogene Markovketten</u>). In diesem Fall ist
$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

21.3 Definition (endlich–dimensionale Verteilung):
Die <u>*endlich–dimensionalen Verteilungen*</u> *eines Prozesses sind definiert als*

$$P(X_{t_n} = i_n, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0)$$

für beliebige Zeitpunkte $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *und Zustände* $i_0, i_1, \ldots, i_n$, $n \in \mathbb{N}$*. Unter der* <u>*absoluten Zustandswahrscheinlichkeit*</u> *versteht man*

$$p_i(n) := P(X_n = i).$$

21.4 Satz:
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Markovkette und* $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *Zeitpunkte. Dann gilt:*

$$P(X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_0} = i_0) \cdot \prod_{\ell=1}^{n} P(X_{t_\ell} = i_\ell | X_{t_{\ell-1}} = i_{\ell-1}). \qquad (21.2)$$

Beweis:
Unter Zuhilfenahme des Multiplikationssatzes (siehe Stochastik I) folgert man

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0) \\
&= \quad P(X_{t_0} = i_0) \cdot P(X_{t_1} = i_1 | X_{t_0} = i_0) \cdot P(X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1, X_{t_0} = i_0) \cdot \ldots \\
&\qquad \ldots \cdot P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_0} = i_0) \\
&\overset{(21.1)}{=} \quad P(X_{t_0} = i_0) \cdot P(X_{t_1} = i_1 | X_{t_0} = i_0) \cdot P(X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1) \cdot \ldots \\
&\qquad \ldots \cdot P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\
&= \quad P(X_{t_0} = i_0) \cdot \prod_{\ell=1}^{n} P(X_{t_\ell} = i_\ell | X_{t_{\ell-1}} = i_{\ell-1}).
\end{aligned}$$

■

21.5 Definition (n–Schritt–Übergangswahrscheinlichkeit):
Für homogene Markovketten nennt man

$$P_{ij}^{(n)} := P(X_n = j | X_0 = i) \qquad (n \in \mathbb{N};\ i, j \in E)$$

die <u>*n–Schritt–Übergangswahrscheinlichkeit*</u> *vom Zustand i in den Zustand j.*

21.6 Satz (Gleichung von Chapman und Kolmogorov):
Für homogene Markovketten gilt

a) $P(X_{n+\nu} = j | X_\nu = i) = P_{ij}^{(n)}$

b) $\forall\ i, j \in E:\ P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj}^{(m)}$.

(Gleichung von Chapman und Kolmogorov).

Beweis:

a) Der Beweis erfolgt per Induktion über n. Es werden

$$P_{ij}^{(0)} := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ i = j \\ 0 & , \ i \neq j \end{cases} \qquad \text{und} \qquad P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$$

gesetzt; nun erfolgt der Schritt von n auf $n + 1$.

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1+\nu} = j | X_\nu = i) &= \sum_{k \in E} P(X_{n+\nu+1} = j, X_{n+\nu} = k | X_\nu = i) \\
&= \sum_{k \in E} P(X_{n+\nu} = k | X_\nu = i) \cdot P(X_{n+\nu+1} = j | X_\nu = i, X_{n+\nu} = k) \\
&\overset{(21.1)}{=} \sum_{k \in E} P(X_{n+\nu} = k | X_\nu = i) \cdot P(X_{n+\nu+1} = j | X_{n+\nu} = k) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj}^{(1)} = P_{ij}^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

b) Auch in diesem Fall wird der Beweis per Induktion, diesmal über m, geführt. Der Induktionsanfang $P_{ij}^{(n+0)} = \sum_{k\in E} \delta_{ik} P_{kj}^{(n)} = \sum_{k\in E} P_{ik}^{(0)} P_{kj}^{(n)}$ ist trivial, der Induktionsschritt lautet

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n+m+1)} &\overset{\text{a)}}{=} \sum_{k\in E} P_{ik}^{(n+m)} \cdot P_{kj}^{(1)} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k\in E} \left(\sum_{\ell\in E} P_{i\ell}^{(n)} \cdot P_{\ell k}^{(m)} \right) \cdot P_{kj}^{(1)} \\
&= \sum_{\ell\in E} \sum_{k\in E} P_{i\ell}^{(n)} \cdot P_{\ell k}^{(m)} \cdot P_{kj}^{(1)} \\
&= \sum_{\ell\in E} P_{i\ell}^{(n)} \cdot \left(\sum_{k\in E} P_{\ell k}^{(m)} \cdot P_{kj}^{(1)} \right) \\
&= \sum_{\ell\in E} P_{i\ell}^{(n)} \cdot P_{\ell j}^{(m+1)}.
\end{aligned}$$

■

21.7 Satz:
Für die absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten $p_i(n) := P(X_n = i)$ einer homogenen Markovkette gilt

$$p_i(n) = \sum_{k\in E} P(X_0 = k) \cdot P_{ki}^{(n)}$$

für alle $i \in E$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
p_i(n) &= \sum_{k\in E} P(X_n = i, X_0 = k) = \sum_{k\in E} P(X_0 = k) \cdot P(X_n = i | X_0 = k) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_0 = k) \cdot P_{ki}^{(n)}.
\end{aligned}$$

■

21.8 Bemerkung:

- Zur Berechnung der endlich–dimensionalen Verteilungen und der absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markovkette benötigt man also lediglich die Startverteilung $\{P(X_0 = k)\}_{k\in E}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten $(P_{ij})_{i,j\in E}$. Mit der Vereinbarung

$$P^{(n)} := \left(P_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in E}$$

folgt aus Satz 21.6:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)} \quad \Longrightarrow \quad P^{(n)} = P^n.$$

- Nimmt man an, dass der Zustandsraum $E := \{1, \ldots, m\}$ endlich ist, und die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ der Übergangsmatrix alle paarweise verschieden sind, so erhält man

$$P = X\Lambda X^{-1} \qquad \text{mit} \;\; \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

  woraus durch schrittweise Multiplikation $P^n = X\Lambda^n X^{-1}$ für die n–Schritt–Übergangswahrscheinlichkeiten entsteht.

21.9 Beispiel:
Eine Übergangsmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := -1/2$ sei gegeben durch

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = X\Lambda X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Die n–Schritt Übergangsmatrix hat demnach die Gestalt

$$P^n = X\Lambda^n X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

21.10 Beispiel (Anwendungen):

- Irrfahrtprobleme und Glücksspiele:
  Auf einem Zahlenstrahl mit den ganzen Zahlen geht man mit Wahrscheinlichkeit p einen Schritt nach links, mit Wahrscheinlichkeit q einen Schritt nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $r := 1 - p - q$ verharre man auf der Position. Diese Dynamik bezeichnet man als Irrfahrt. Ist $p = q = 1/2$, so spricht man von einer symmetrischen Irrfahrt.

  Fragestellungen, die hier von Interesse sind, sind zum Beispiel: Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet man wieder im Ursprung? Besteht hier eine positive Wahrscheinlichkeit, so handelt es sich um eine sogenannte rekurrente Irrfahrt. Wie ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit zum Ursprung abhängig von dem gewählten Startpunkt ?

  Das Problem von Irrfahrten lässt sich für Glücksspiele spezialisieren. So sei X_n das Spielkapital zum Zeitpunkt n. Das Startkapital sei $N \in \mathbb{N}$, also $X_0 = N$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Absorption, d.h. die Ruinwahrscheinlichkeit?

  Die Übergangsmatrix hat bei diesen Problemen die Gestalt:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} r & p & 0 & 0 & \\ q & r & p & 0 & \\ 0 & q & r & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & r & \\ & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Verzweigungsprozesse:
  Es wird eine Menge von Individuen betrachtet, von denen jedes eine gewisse Nachkommenschaft haben kann. Die Nachkommenschaft sei für jedes Individuum eine diskrete

Zufallsvariable ξ mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Die Anzahl der Individuen zur Zeit n werde mit X_n bezeichnet (sogenannte n–te Generation). Dann gilt, wenn ξ_k die Nachkommenschaft des k–ten Individuums bezeichnet:

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ X_0 = 1).$$

Folglich stellt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Einschritt–Übergangsmatrix

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P\left(\sum_{k=1}^{i} \xi_k = j\right) \qquad (i, j \in \mathbb{N}_0)$$

dar. In diesem Zusammenhang kann man fragen: Wie groß ist die Aussterbewahrscheinlichkeit p und, falls $p = 1$ ist, wieviel Zeit vergeht bis zur Absorption?

Markovketten können durch bewertete gerichtete Graphen veranschaulicht werden. Allgemein besteht ein gerichteter Graph G aus einer abzählbaren Menge J und einer geordneten Teilmenge $K \subseteq J \times J$. Wir schreiben $[J, K]$ und nennen G vollständig, falls $K = J \times J$ gilt. Die Elemente von J werden als Punkte oder Knoten bezeichnet, die geordneten Paare $k = (i, j) \in K$ als gerichtete Kanten oder Pfeile. Die jeder Kante $k \in K$ zugeordneten Punkte i und j heißen Endpunkte der Kante. Genauer sagt man, dass $k = (i, j)$ mit i positiv und mit j negativ inzident ist. Eine Folge $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_n}$ von Pfeilen $k_{\alpha_r} \in K$ wird gerichtete Kantenfolge oder Pfeilfolge von G genannt, wenn eine Folge von Punkten exisitiert, etwa $j_{\beta_0}, \ldots, j_{\beta_r}$, so dass $k_{\alpha_r} = \left(j_{\beta_{r-1}}, j_{\beta_r}\right)$ $(r = 1, \ldots, n)$ gilt. j_{β_0} ist der Anfangs– und j_{β_n} der Endpunkt der Pfeilfolge. Gibt es in G eine Pfeilfolge mit dem Anfangspunkt i und dem Endpunkt j, dann heißt j von i aus erreichbar. Wir sagen, i und j sind miteinander verbunden, wenn sowohl j von i aus als auch i von j aus erreichbar ist. Stark zusammenhängende gerichtete Graphen sind solche, in denen je zwei Punkte miteinander verbunden sind.
Eine Abbildung ζ der Kantenmenge K in die reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\zeta:\ K \to \overline{\mathbb{R}}, \quad (i, j) \mapsto \zeta(i, j),$$

nennen wir eine Bewertung des Graphen. Bewerteten gerichteten Graphen gibt man das Symbol $G = [J, K, \zeta]$.

21.11 Definition:
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (P_{ij})_{i,j\in E}$. Der bewertete gerichtete Graph $M = [J, k, \zeta]$ mit $J = E$, $K = \{(i, j) \in E \times E \mid P_{ij} \neq 0\}$ und $\zeta(i, j) = P_{ij}$ heißt Markovgraph der Markovkette.

21.2 Klassifikation von Zuständen

21.12 Definition ((gegenseitig) erreichbar, kommunizieren miteinander, irreduzibel):

a) *Ein Zustand j heißt vom Zustand i erreichbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $P_{ij}^{(n)} > 0$, d.h. mit positiver Wahrscheinlichkeit findet der Prozess nach endlich vielen Schritten nach j, wenn er in i gestartet ist. In Zeichen $i \to j$.*

b) *Die Zustände $i, j \in E$ heißen gegenseitig erreichbar oder kommunizieren miteinander, wenn $i \to j$ und $j \to i$ gelten. In diesem Fall schreibt man $i \leftrightarrow j$.*

c) E heißt <u>irreduzibel</u>, wenn $i \leftrightarrow j$ für alle $i, j \in E$ gilt.

21.13 Satz:
Die Relation „$\leftrightarrow$" definiert eine Äquivalenzrelation auf E.

Beweis:
Die Reflexivität $i \leftrightarrow i$ ist wegen $P_{ij}^{(0)} := \delta_{ij}$ klar. Die Symmetrie ergibt sich unmittelbar aus der Definiton von $\leftrightarrow$. Bleibt die Transitivität zu zeigen, d.h. aus $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k$ folgt $i \leftrightarrow k$. Vorausgesetzt wird also, dass $n, m \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $P_{ij}^{(n)} > 0$ und $P_{jk}^{(m)} > 0$. Es folgt mit Anwendung der Gleichung von Chapman und Kolmogorov

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r \in E} P_{ir}^{(n)} P_{rk}^{(m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0.$$

■

21.14 Definition (abgeschlossene Klasse, absorbierender Zustand):

a) Durch die Äquivalenzrelation $\leftrightarrow$ zerfällt der Zustandsraum E in Äquivalenzklassen, die als <u>Kommunikationsklassen</u> bezeichnet werden.

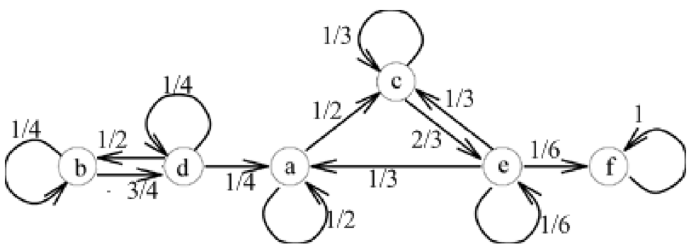
b) Eine Menge C von Zuständen heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn kein Zustand in der Menge $E \setminus C$ von C aus erreichbar ist.

c) Ein Zustand i heißt <u>absorbierender Zustand</u>, wenn $\{i\}$ eine abgeschlossene Klasse ist.

21.15 Beispiel:
Es wird der Zustandsraum $E := \{a, b, c, d, e, f\}$ mit der Übergangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Die Äquivalenzklassen ermittelt man mit Hilfe des korrespondierenden Markovgraphen, der in diesem Fall wie folgt aussieht:



Man erhält demnach die Klassen $C_1 := \{b, d\}$, $C_2 := \{a, c, e\}$ und $C_3 := \{f\}$. Die Klassen C_1 und C_2 sind nicht abgeschlossen. Der Zustand f ist ein absorbierender Zustand.

21.16 Bemerkung:
Offensichtlich sind folgende Aussagen äquivalent:

- E ist irreduzibel,
- der Markovgraph ist stark zusammenhängend.

21.17 Bemerkung (zum eingebetteten Erneuerungsprozess):
Im Folgenden werden die Rückkehrzeiten in einen bestimmten Zustand j betrachtet. Dazu soll zunächst eine homogene Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die in einem beliebigen Zustand $X_0 = i$ startet, veranschaulicht werden. j sei ein von i erreichbarer Zustand der Kette.

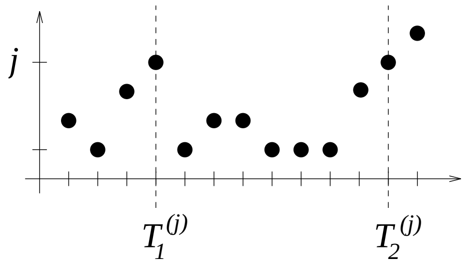


Abbildung 21.1: Rückkehrverhalten von Markovketten

Es sei
$$T_0^{(j)} := 0 \qquad \text{und} \qquad T_n^{(j)} := \inf\{k > T_{n-1}^{(j)} | X_k = j\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$T_1^{(j)}$ beschreibt also den Zeitpunkt, an dem die Markovkette zum ersten Mal den Zustand j erreicht, $T_2^{(j)}$ den Zeitpunkt der zweiten Rückkehr, usw. Aufgrund der Markoveigenschaft von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ handelt es sich bei $\left(T_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ um einen modifizierten Erneuerungsprozess. Man spricht auch von einem eingebetteten Erneuerungsprozess.

21.18 Definition (mittlere Rückkehrzeit):

a) Die Wahrscheinlichkeit, in genau n Schritten von i nach j zu gelangen, ohne zwischendurch j schon einmal erreicht zu haben, wird mit
$$f_{ij}^{(n)} := P\left(T_1^{(j)} = n | X_0 = i\right)$$
bezeichnet.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die im Zustand i startende Markovkette den Zustand j überhaupt erreicht, notiert man als
$$f_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

c) Die <u>mittlere Rückkehrzeit</u> von i nach j ist definiert durch

$$\mu_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}^{(n)}.$$

21.19 Definition (Zustandsklassifikationen):
Ein Zustand $i \in E$ heißt

a) <u>periodisch</u> bzw. <u>aperiodisch</u>, falls $T_2^{(j)} - T_1^{(j)}$ arithmetisch–verteilt ist mit der Gitterkonstanten $d \neq 1$ bzw. $d = 1$.

b) <u>rekurrent</u> bzw. <u>transient</u>, falls $f_{ii}^* = 1$ bzw. $f_{ii}^* < 1$ ist.

c) <u>ergodisch</u> oder auch <u>positiv rekurrent</u>, falls $f_{ii}^* = 1$ ist und $\mu_{ii} < \infty$ ist.

d) <u>null–rekurrent</u>, falls $f_{ii}^* = 1$ ist und $\mu_{ii} = \infty$ ist.

Um Aussagen über das Grenzverhalten von Markovketten teffen zu können, soll jetzt $P_{ij}^{(n)}$ in Abhängigkeit von $f_{ij}^{(n)}$ dargestellt weden. Unter Ausnutzung der Homogenität gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} P\left(T_1^{(j)} = k, X_n = j \middle| X_0 = i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P\left(T_1^{(j)} = k \middle| X_0 = i\right) \cdot P\left(X_{n-k} = j \middle| X_0 = j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \cdot P_{jj}^{(n-k)}. \qquad (21.3)
\end{aligned}$$

Mit den erzeugenden Funktionen

$$P_{ij}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n, \quad |z| \leq 1, \qquad \text{und} \qquad F_{ij}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \quad |z| \leq 1,$$

gilt dann aufgrund von (21.3) und wegen $f_{ij}^{(0)} = 0$:

$$\begin{aligned}
P_{ij}(z) &= \underbrace{P_{ij}^{(0)}}_{=\delta_{ij}} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \right) z^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \right) z^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}^{(k)} z^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{jj}^{(n-k)} z^{n-k} \\
&= \delta_{ij} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} z^n \right) \\
&= \delta_{ij} + F_{ij}(z) \cdot P_{jj}(z), \quad |z| \leq 1. \qquad (21.4)
\end{aligned}$$

Stellt man diese Gleichung für $i = j$ nach $P_{jj}(z)$ um, so erhält man

$$P_{jj}(z) = \frac{1}{1 - F_{jj}(z)}, \quad |z| \leq 1.$$

Verwendet man diesen Wert für $P_{jj}(z)$ in (21.4), so ergibt sich für $i \neq j$:

$$P_{ij}(z) = \frac{F_{ij}(z)}{1 - F_{jj}(z)}, \quad |z| \leq 1.$$

Mit diesen Vorüberlegungen lässt sich nun der folgende Satz beweisen:

21.20 Satz:

a) *Ein Zustand $j \in E$ ist genau dann rekurrent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} P_{jj}^{(k)} = \infty$ gilt.*

b) *Ist $j \in E$ transient, so folgt für alle $i \in E$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)} < \infty$ gilt.*

Beweis:

a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \lim_{z \to 1-} P_{jj}(z) = \lim_{z \to 1-} \frac{1}{1 - F_{jj}(z)} = \frac{1}{1 - f_{jj}^*}.$$

Aus der Tatsache, dass $f_{jj}^* = 1$ genau dann gilt, wenn j rekurrent ist, folgt nun die Behauptung.

b) Ist j transient, dann gilt $f_{jj}^* < 1$ und damit

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 1-} P_{jj}(z) &= \lim_{z \to 1-} \frac{1}{1 - F_{jj}(z)} = \frac{1}{1 - f_{jj}^*} < \infty \\
\sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)} &= \lim_{z \to 1-} P_{ij}(z) = f_{ij}^* \cdot \lim_{z \to 1-} P_{jj}(z) < \infty.
\end{aligned}$$

■

Es sollen nun noch Zusammenhänge zwischen Rekurrenz, Periodizität und Erreichbarkeit gezeigt werden.

21.21 Satz:

Rekurrenz ist eine Klasseneigenschaft, d.h. gilt $i \leftrightarrow j$ und ist i rekurrent, dann ist auch j rekurrent.

Beweis:

Aus $i \leftrightarrow j$ folgt laut Definition die Existenz natürlicher Zahlen n und m mit den Eigenschaften $P_{ij}^{(m)} > 0$ und $P_{ji}^{(n)} > 0$. Sei $\nu > 0$.

$$\begin{aligned}
P_{jj}^{(m+\nu+n)} &= \sum_{k \in E} P_{jk}^{(m+\nu)} \cdot P_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in E} \left(\sum_{\ell \in E} P_{j\ell}^{(m)} \cdot P_{\ell k}^{(\nu)} \right) P_{kj}^{(n)} \\
&\overset{k=\ell=i}{\geq} P_{ji}^{(m)} \cdot P_{ii}^{(\nu)} \cdot P_{ij}^{(n)} \\
\Longrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{jj}^{(m+\nu+n)} &\geq P_{ji}^{(m)} \cdot P_{ij}^{(n)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{ii}^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Ist i rekurrent, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_{ii}^{(\nu)} = \infty$. Somit hat auch die Gesamtsumme den Wert ∞. Der Zustand j ist also rekurrent. ∎

21.22 Satz:
Ist i rekurrent und $i \to j$ $(j \neq i)$, so gilt $f_{ji}^* = 1$, insbesondere ist auch $j \to i$ und somit $f_{ij}^* = 1$.

Beweis:
Da i rekurrent ist, gilt $f_{ii}^* = 1$. Setze $g_{ij}^{(k)} = P(X_k = j, X_\nu \neq i, 0 < \nu < k \mid X_0 = i)$, so folgt unter Verwendung der Markoveigenschaft für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
0 =& 1 - f_{ii}^* = P(X_n \neq i, n \in \mathbb{N} \mid X_0 = i) \geq P(X_k = j, X_n \neq i, n \in \mathbb{N} \mid X_0 = i) \\
=& P(X_n \neq i, n > k \mid X_0 = i, X_k = j, X_\nu \neq i, 0 < \nu < k) \\
& \cdot P(X_k = j, X_\nu \neq i, 0 < \nu < k \mid X_0 = i) \\
=& P(X_n \neq i, n > 0 \mid X_0 = j) \cdot g_{ij}^{(k)} = \left(1 - f_{ji}^*\right) g_{ij}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Da $i \to j$ vorausgesetzt ist, ist $g_{ij}^{(k)} > 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und es folgt $f_{ji}^* = 1$.
Damit gilt $j \to i$, nach Satz 21.21 ist auch j rekurrent und aus Symmetriegründen folgt $f_{ij}^* = 1$. ∎

21.23 Satz:
Periodizität mit Periode d ist eine Klasseneigenschaft, d.h. gilt $i \leftrightarrow j$ und ist i periodisch mit Periode d, so auch j.

Beweis:
Es wird verwendet, dass für d–periodische Zustände i der Fall $P_{ii}^{(n)} > 0$ höchstens für $d \mid n$ eintreten kann. Wegen $i \leftrightarrow j$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $\beta := P_{ij}^{(m)} \cdot P_{ji}^{(n)} > 0$ ist. Dann ist (nach der Gleichung von Chapman–Kolmogorov)

$$P_{ii}^{(m+n)} \geq \beta,$$

und da d nach Definition die kleinste Periode ist, folgt $d \mid (m+n)$. Wiederum nach Chapman–Kolmogorov gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$P_{ii}^{(m+k+n)} \geq \beta P_{jj}^{(k)}$$

und es folgt

$$P_{jj}^{(k)} > 0 \quad \Rightarrow \quad P_{ii}^{(m+k+n)} > 0 \quad \Rightarrow \quad d|(m+k+n) \quad \Rightarrow \quad d|k.$$

Für die Periode d' von j gilt daher $d|d'$. Wegen der Symmetrie von $i \leftrightarrow j$ kann die Argumentation auch umgekehrt werden und es folgt $d'|d$ und somit $d = d'$.
Der Fall $d = 1$ ist im Beweis erlaubt, insbesondere ist Aperiodizität eine Klasseneigenschaft. ∎

21.24 Beispiel:
Für die homogene Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit dem Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ habe die Übergangsfunktion die Form

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 & & & \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & & \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei möge $0 < p_i < 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gelten.
Von jedem Zustand $j \in \mathbb{N}_0$ ist der Zustand 0 in einem Schritt erreichbar, von dort ist der Zustand m in m Schritten erreichbar, d.h. die Markovkette ist irreduzibel. Unabhängig vom Startzustand i ist $P_{i0}^{(m)} > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und insbesondere ist der Zustand 0 aperiodisch. Wegen der Irreduzibilität sind dann auch alle anderen Zustände aperiodisch.
Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, genügt es, den Zustand 0 auf Rekurrenz zu untersuchen; d.h. es muss getestet werden, unter welchen Voraussetzungen

$$f_{00}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 1 \qquad \text{mit} \qquad f_{00}^{(n)} = P(X_n = 0, X_i \neq 0 \ (1 \leq i \leq n-1) \mid X_0 = 0)$$

gilt. Offensichtlich ist

$$f_{00}^{(1)} = p_0 = 1 - (1 - p_0).$$

Für $n \geq 2$ gilt

$$f_{00}^{(n)} = \left(\prod_{i=0}^{n-2}(1-p_i)\right) p_{n-1} = \left(\prod_{i=0}^{n-2}(1-p_i)\right)(1-(1-p_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-2}(1-p_i) - \prod_{i=0}^{n-1}(1-p_i),$$

so dass sich für die zugehörige Partialsumme eine Teleskopsumme ergibt:

$$\sum_{n=1}^{m+1} f_{00}^{(n)} = 1 - \prod_{i=0}^{m}(1-p_i).$$

Nach einem Satz aus der Analysis strebt das Produkt $\prod\limits_{i=0}^{m}(1-p_i)$ für $m \to \infty$ (unter der Voraussetzung $0 < p_i < 1$) genau dann gegen 0, wenn $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.
Zusammenfassend können wir deshalb feststellen:

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist irreduzibel,
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist aperiodisch und
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann rekurrent, wenn $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i$ divergiert.

21.3 Grenzverhalten von Markovketten

Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung der Grenzwerte $\pi_i := \lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}$ bzw. $\pi_{ji} := \lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)}$. Die Existenz der Grenzwerte kann auf den Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie (vergleiche Stochastik II, Kapitel 17) zurückgeführt werden.
Um zunächst eine diskrete Erneuerungsgleichung für $P_{ji}^{(n)}$ zu erhalten, summiere man über den größten Zeitpunkt $k < n$ mit $X_k = i$. Unter Verwendung der Markoveigenschaft erhält man dann

$$\begin{aligned}
P_{ji}^{(n)} &= f_{ji}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = i, X_{k+1} \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i \mid X_0 = j) \\
&= f_{ji}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{k+1} \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i \mid X_k = i, X_0 = j) \cdot P(X_k = i \mid X_0 = j) \\
&= f_{ji}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P(X_1 \neq i, \dots, X_{n-k-1} \neq i, X_{n-k} = i \mid X_0 = i) \cdot P_{ji}^{(k)} \\
&= f_{ji}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} f_{ii}^{(n-k)} P_{ji}^{(k)}
\end{aligned}$$

bzw.

$$P_{ji}^{(n)} = f_{ji}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(n-k)} P_{ji}^{(k)} \qquad (j, i \in E),$$

wenn man $f_{ij}^{(0)} := 0$ vereinbart. Diese diskrete Erneuerungsgleichung wird durch

$$f_{ji} + R_{ii} * f_{ji} \qquad (j, i \in E)$$

gelöst; dabei ist R_{ii} die Erneuerungsfunktion des eingebetteten Erneuerungsprozesses $\left(T_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

21.25 Satz:

a) *Ist $i \in E$ positiv rekurrent mit Gitterkonstante d, so gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}}$.

b) *Ist $i \in E$ null–rekurrent mit Gitterkonstante d, so gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = 0$.

c) *Ist $i \in E$ transient, so gilt:* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = 0$ *für alle $j \in E$.*

d) *Ist $i \in E$ rekurrent mit Gitterkonstante d, so existiert ein $c_{ji} \in \mathbb{N}$, so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ji}^{(c_{ji}+nd)} = f_{ji}^{*} \cdot \frac{d}{\mu_{ii}}$ *für alle $j \in E$ gilt.*

Beweis:
Punkt c) folgt aus Satz 21.20, wonach $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ji}^{(n)} < \infty$ und somit $P_{ji}^{(n)}$ eine Nullfolge ist. Die Aussagen a), b) und d) folgen aus dem Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie (arithmetischer Fall), demzufolge für alle $c = 0, 1, \dots, d-1$

$$\lim_{n\to\infty} R_{ii} * f_{ji}(c + nd) = \begin{cases} \frac{d}{\mu_{ii}} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} f_{ji}^{(c+nd)} & , \quad \mu_{ii} < \infty \\ 0 & , \quad \mu_{ii} = \infty \end{cases}$$

gilt. Da d als kleinste Gitterkonstante vorausgesetzt ist, kann $c = c_{ji}$ (eindeutig) so gewählt werden, dass $P_{ji}^{(m)} > 0$ höchstens für $m \equiv c_{ji} \bmod d$ gilt. Damit gilt auch $f_{ji}^{(m)} > 0$ höchstens für $m \equiv c_{ji} \bmod d$ und da $f_{ji}^{(m)}$ eine Nullfolge ist (die Reihe konvergiert), folgt im Fall $\mu_{ii} < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(c_{ji}+nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_{ji}^{(c_{ji}+nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}} \sum_{m\in\mathbb{N}_0} f_{ji}^{(m)} = \frac{d}{\mu_{ii}} f_{ji}^*.$$

Im Fall $j = i$ muss $c_{ji} = 0$ gewählt werden, wegen der vorausgesetzten Rekurrenz ist $f_{ii}^* = 1$, und damit folgt die Behauptung. ■

21.26 Bemerkung:
Der Satz hat großen praktischen Nutzen: Es wird eine Markovkette, deren Werte zu berechnen nicht möglich oder zu aufwendig ist, betrachtet. Durch Simulation ist es möglich, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zustand i zu bestimmen. Diese wird nach der Aussage des Satzes gegen $\frac{d}{\mu_{ii}}$ konvergieren. Man kann den Wert μ_{ii} also durch Simulation annähern.

In Erweiterung von Satz 21.21 gilt

21.27 Satz:
Null–Rekurrenz (und damit auch positive Rekurrenz) ist eine Klasseneigenschaft, d.h. falls $i \leftrightarrow j$ und i null–rekurrent, so ist auch j null–rekurrent.

Beweis:
Ist i rekurrent, so ist nach Satz 21.21 auch j rekurrent. Wegen $i \leftrightarrow j$ gibt es $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $\beta := P_{ij}^{(m)} \cdot P_{ij}^{(n)} > 0$ ist. Dann ist (nach Chapman–Kolmogorov) für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$P_{ii}^{(m+k+n)} \geq \beta P_{jj}^{(k)}$$

und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} P_{jj}^{(k)} \leq \frac{1}{\beta} \lim_{k\to\infty} P_{ii}^{(k)}.$$

Für einen null–rekurrenten Zustand i verschwindet nach Satz 21.25 die rechte und damit auch die linke Seite. Da j rekurrent ist, folgt erneut mit Satz 21.25, dass j null–rekurrent ist. ■

21.28 Bemerkung:
Die Sätze 21.21, 21.23 und 21.27 besagen, dass Rekurrenz, Transienz, positive Rekurrenz, Null–Rekurrenz, Periodizität mit Periode $d \geq 1$ und Aperiodizität Klasseneigenschaften darstellen.

21.29 Beispiel (Symmetrischer Random Walk auf $\mathbb{R}$):
Wir symmetrisieren das Irrfahrtproblem aus Beispiel 21.10, d.h. wir wählen $E = \mathbb{Z}$ und es sei p die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von n nach $n+1$ und $q = 1-p$ die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von n nach $n-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n+1)} &= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ P_{00}^{(2n)} &= \binom{2n}{n} p^n q^n \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel

$$n! \approx n^{n+0.5} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

folgt

$$P_{00}^{(2n)} \approx \frac{(p \cdot q)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Die Reihe konvergiert also für $4pq < 1$ und divergiert für $4pq \geq 1$. Damit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad p = q = \frac{1}{2}.$$

Intuitiv wird für $p \neq q$ klar: Wenn eine Irrfahrt in der Null startet, so strebt sie für $p > q$ mit positiver Wahrscheinlichkeit gegen $+\infty$ und für $p < q$ gegen $-\infty$, ohne je zur Null zurückzukehren.

21.30 Beispiel (Symmetrischer Random Walk im $\mathbb{R}^2$):
Beim symmetrischen zweidimensionalen Random Walk im $\mathbb{R}^2$ sind die Wahrscheinlichkeiten für eine Bewegung um 1 nach rechts, links, oben und unten jeweils 1/4. Es wird wieder der Zustand 0 auf Rekurrenz untersucht.
Dazu werden alle Pfade, in denen das Teilchen während der Irrfahrt i Einheiten nach rechts, i Einheiten nach links und je j Einheiten nach oben oder unten bewegt wird (mit $2i+2j = 2n$), untersucht. Dann ist

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n+1)} &= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ P_{00}^{(2n)} &= \sum_{i+j=n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Erweitert man $P_{00}^{(2n)}$ mit $(n!)^2$, so erhält man

$$P_{00}^{(2n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2$$

und mit der Stirlingschen Formel schließlich $P_{00}^{(2n)} \approx \frac{1}{n\pi}$. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \infty,$$

ist 0 ein rekurrenter Zustand.

21.31 Beispiel (Symmetrischer Random Walk im $\mathbb{R}^3$):
Beim symmetrischen Random Walk im $\mathbb{R}^3$ sind die Wahrscheinlichkeiten für eine Bewegung um 1 nach rechts, links, oben, unten, vorne und hinten jeweils 1/6. Wie im ein- bzw. zweidimensionalen Fall wird der Zustand 0 auf Rekurrenz untersucht. Dazu werden alle Pfade betrachtet, in denen das Teilchen während der Irrfahrt i Einheiten nach rechts, i Einheiten

nach links, j Einheiten nach oben, j Einheiten nach unten, $n-i-j$ Einheiten nach vorne und $n-i-j$ Einheiten nach hinten bewegt wird ($i+j \leq n$). Es folgt

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n+1)} &= 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ P_{00}^{(2n)} &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!(n-i-j)!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Erweitern mit $(n!)^2$ und Ausklammern von $(1/2)^{2n}$ ergibt

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n)} &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{0 \leq i+j \leq n} \left[\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right]^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ P_{00}^{(2n)} &\leq c_n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^n} \quad \text{mit} \quad c_n := \max_{0 \leq i+j \leq n} \left[\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right] \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

Für große n wird das Maximum in c_n angenommen für $i = j \approx n/3$. Dann ist

$$P_{00}^{(2n)} \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)! \left(\frac{n}{3}\right)! \left(\frac{n}{3}\right)! 2^{2n} 3^n} \binom{2n}{n} \approx \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{3/2} n^{3/2}}.$$

Der Zustand 0 ist also nicht rekurrent, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{3/2} n^{3/2}} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(2n)} < \infty.$$

Es gibt also eine positive Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen einen verlassenen Zustand nicht mehr erreicht.

21.32 Satz:
Es sei E eine aperiodische positiv-rekurrente Klasse mit $\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}$ für alle $i, j \in E$. Dann hat das Gleichungssystem

$$u_i = \sum_{k \in E} u_k \cdot P_{ki} \qquad (i \in E) \tag{21.5}$$

genau eine Lösung $(u_i)_{i \in E}$ mit $u_i \geq 0$ für alle $i \in E$ und $\sum_{i \in E} u_i = 1$, nämlich $u_i = \pi_i$.

Beweis:
Aufgrund der Gleichung von Chapman und Kolmogorov gilt:

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj} \qquad (i \in E).$$

Indem man auf beiden Seiten den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführt und das Lemma von Fatou heranzieht, erhält man

$$\begin{aligned}\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in E} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj} \geq \sum_{k\in E} \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj} \\ &= \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj} \qquad (j \in E).\end{aligned}$$

Um die Beziehung

$$\pi_j = \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj} \qquad (j \in E)$$

nachzuweisen, wird angenommen, dass für mindestens einen Index j^*

$$\pi_{j^*} > \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj^*}$$

gilt. Würde man nun die Ungleichung $\pi_j \geq \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj}$ über alle j summieren, so bekäme man

$$\sum_{j\in E} \pi_j > \sum_{j\in E} \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj} = \sum_{k\in E} \pi_k \sum_{j\in E} P_{kj} = \sum_{k\in E} \pi_k,$$

was aber nicht sein kann. Deshalb muss

$$\pi_j = \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj} \qquad (j \in E)$$

sein. Iteriert man diese Gleichung, erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\pi_j &= \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj} = \sum_{k\in E} \left(\sum_{\ell\in E} \pi_\ell \cdot P_{\ell k} \right) \cdot P_{kj} \\ &= \sum_{\ell\in E} \pi_\ell \sum_{k\in E} P_{\ell k} \cdot P_{kj} = \sum_{\ell\in E} \pi_\ell \cdot P_{\ell j}^{(2)} \qquad (j \in E).\end{aligned}$$

Indem man in dieser Weise fortfährt, ergibt sich schließlich

$$\pi_j = \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj}^{(n)} \qquad (j \in E).$$

Da $\left| P_{ij}^{(n)} \right| \leq 1$ für alle n ist und $\sum_{j\in E} \pi_j < \infty$ ist, kann der Satz von der majorisierten Konvergenz angewandt werden:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in E} \pi_k \cdot P_{kj}^{(n)} = \sum_{k\in E} \pi_k \cdot \lim_{n\to\infty} P_{kj}^{(n)} \\ &= \left(\sum_{k\in E} \pi_k \right) \cdot \pi_j.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung aber folgt zusammen mit der Beziehung $\pi_j > 0$ für alle $j \in E$ (E ist eine positiv rekurrente Klasse), dass $\sum_{i\in E} \pi_i = 1$ sein muss.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit wird angenommen, dass es eine zweite Lösung $(x_i)_{i\in E}$ mit $x_i \geq 0$ für alle $i \in E$ und $\sum_{i\in E} x_i = 1$ gibt. Genauso wie oben schließt man, dass dann auch

$$x_j = \sum_{i\in E} x_i \cdot P_{ij}^{(n)} \qquad (j \in E)$$

gelten muss. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned} x_j &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} x_i \cdot P_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in E} x_i \left(\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}\right) \\ &= \sum_{i\in E} x_i \cdot \pi_j \qquad (j \in E). \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $\sum\limits_{i\in E} x_i = 1$ muss dann aber $x_j = \pi_j$ für alle $j \in E$ gelten. ■

21.33 Definition:
Allgemein heißt $u = (u_i)_{i\in E}$ stationäres Maß für die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls $u_i \geq 0$ und $u_i = \sum_{k\in E} u_k \cdot P_{ki}$ für alle $i \in E$ erfüllt ist. Es wird dann auch kurz in Zeilenvektorschreibweise $u = uP$ geschrieben. Gilt zusätzlich $\sum_{i\in E} u_i = 1$, so spricht man von einer stationären Verteilung.

21.34 Beispiel (Eindimensionale Irrfahrt):
Als Anwendungsbeispiel für Satz 21.32 greifen wir wieder auf das Irrfahrtproblem aus Beispiel 21.10 zurück. Es sei also $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $E := \mathbb{N}_0$ und Einschritt–Übergangswahrscheinlichkeit

$$P := \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & \cdots & \cdots \\ q & 1-p-q & p & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 1-p-q & p & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

wobei $0 < p + q < 1$ gilt.
Da nur Übergänge zu den Nachbarzuständen erlaubt sind, reduziert sich das System der stationären Gleichungen

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot P_{kj} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

auf eine lineare Rekursion zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + q\pi_1 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + (1-p-q)\pi_1 + q\pi_2 \\ &\vdots \\ \pi_j &= p\pi_{j-1} + (1-p-q)\pi_j + q\pi_{j+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} q\pi_1 &= p\pi_0 \\ q\pi_{j+1} &= (p+q)\pi_j - p\pi_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Wir zeigen $\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ mittels Induktion. Für $j = 0$ und $j = 1$ ist die Aussage evident. Wir schließen nun von $j-1$ und j auf $j+1$:

$$\pi_{j+1} = \frac{1}{q}\left((p+q)\frac{p^j}{q^j}\pi_0 - p\frac{p^{j-1}}{q^{j-1}}\pi_0\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{p^{j+1}}{q^j} + \frac{p^j}{q^{j-1}} - \frac{p^j}{q^{j-1}}\right)\pi_0 = \frac{p^{j+1}}{q^{j+1}}\pi_0.$$

Damit ist für $p < q$ die Existenz einer nichtnegativen summierbaren Lösung der stationären Gleichungen nachgewiesen. Folglich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $p < q$ positiv rekurrent. π_0 berechnet man mit Hilfe der Normierungsbedingung $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, d.h. es muss

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j = \frac{\pi_0}{1 - \frac{p}{q}}$$

gelten, woraus $\pi_0 = 1 - \frac{p}{q}$ folgt. Zusammenfassend erhält man als Grenzverteilung:

$$\pi_j = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

21.4 Berechnung von Absorptionswahrscheinlichkeiten

Es werden im Folgenden diese Bezeichnungen benutzt:

- $\alpha_i(R)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass die im transienten Zustand i startende Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in der Menge R absorbiert wird.

- $\alpha_i^n(R)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass die im transienten Zustand i startende Markovkette $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach genau n Schritten in der Menge R absorbiert wird.

Ferner sei T die Menge aller transienten Zustände. Zunächst lässt sich damit feststellen:

(i) $\alpha_i(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i^n(R) \le 1 \quad (i \in T)$,

(ii) $\alpha_i^1(R) = \sum_{j\in R} P_{ij} \quad (i \in T)$,

(iii) $\alpha_i^n(R) = \sum_{j\in T} P_{ij} \cdot \alpha_j^{n-1}(R) \qquad (i \in T,\ n \ge 2)$.

Mit diesen Beziehungen erhält man:

$$\begin{aligned}
\alpha_i(R) &\overset{\text{(i)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i^n(R) \\
&= \alpha_i^1(R) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_i^n(R) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \alpha_i^1(R) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j \in T} P_{ij} \cdot \alpha_j^{n-1}(R) \\
&= \alpha_i^1(R) + \sum_{j \in T} P_{ij} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_j^{n-1}(R) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \alpha_i^1(R) + \sum_{j \in T} P_{ij} \cdot \alpha_j(R) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{j \in R} P_{ij} + \sum_{j \in T} P_{ij} \cdot \alpha_j(R).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\alpha &:= (\alpha_1(R), \alpha_2(R), \ldots, \alpha_N(R))^T \\
\beta &:= \left(\sum_{j \in R} P_{1j}, \sum_{j \in R} P_{2j}, \ldots, \sum_{j \in R} P_{Nj} \right)^T
\end{aligned}$$

kann man das obige Gleichungssystem auch in Matrixform notieren:

$$\alpha = \beta + P\alpha \quad \text{bzw.} \quad \alpha(I - P) = \beta,$$

wobei I die Einheitsmatrix bedeutet.

21.35 Beispiel (Gambler's Ruin):
Als Anwendungsbeispiel wird das folgende Glücksspiel betrachtet: Ein Spieler beginnt das Spiel mit einem Startkapital von i Geldeinheiten. Mit Wahrscheinlichkeit p gewinnt er auf jeder Stufe eine Einheit hinzu, mit Wahrscheinichkeit $q := 1 - p$ verliert er eine Einheit. Das gemeinsame Kapital von Bank und Spieler beträgt n Einheiten. Es soll die Wahrscheinlichkeit $\alpha_i(0)$, $i \in T := \{1, 2, \ldots, n-1\}$, berechnt werden, dass der mit dem Kapital i beginnende Spieler ruiniert wird. Die zu diesem Spiel gehörende Übergangsmatrix hat die Ordnung $n + 1$ und lautet:

$$P = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\
q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\
 & q & 0 & p & & \vdots \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & q & 0 & p \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.$$

Da nur Übergänge zu den Nachbarzuständen erlaubt sind, reduziert sich das Gleichungssystem für die Berechnung der $\alpha_i := \alpha_i(0)$, $i = 1, \ldots, n-1$, auf die Gleichung

$$\alpha_i = q\alpha_{i-1} + p\alpha_{i+1} \quad (2 \leq i \leq n-2)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= q + p\alpha_2, \\ \alpha_{n-1} &= q\alpha_{n-2}. \end{aligned}$$

(Beachte: Es wird nur die Absorptionswahrscheinlichkeit in der Null betrachtet, also $n \notin R$.) Die zur Differenzengleichung gehörende charakteristische Gleichung (siehe Anhang A) lautet

$$x = q + px^2.$$

Wegen $p + q = 1$ sind die zugehörigen Wurzeln

$$x_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{q}{p}.$$

Im Fall $p \neq q$ lautet deshalb die allgemeine Lösung

$$\alpha_i = c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und im Fall $p = q$

$$\alpha_i = c_1 + c_2 \cdot i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmt man mit Hilfe der Randbedingungen.

1. Fall ($p \neq q$):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = q + p\alpha_2 &\iff c_1 + c_2\frac{q}{p} = q + p\left(c_1 + c_2\frac{q^2}{p^2}\right) \\ &\iff c_1 + c_2\frac{q}{p} = q + (1-q)c_1 + c_2\frac{q}{p}(1-p) \\ &\iff c_2 = 1 - c_1. \\ \alpha_{n-1} = q\alpha_{n-2} &\iff c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} = q \cdot \left(c_1 + c_2\left(\frac{q}{p}\right)^{n-2}\right) \\ &\iff \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}(1-p)c_2 = (q-1)c_1 \\ &\iff p^n c_1 + q^n c_2 = 0 \\ &\iff c_1 = \frac{q^n}{q^n - p^n} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{-p^n}{q^n - p^n}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

2. Fall ($p = q = 0.5$):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = q + p\alpha_2 &\iff c_1 + c_2 = q + p \cdot (c_1 + 2c_2) \\
&\iff c_1(1-p) = q + (2p-1)c_2 \\
&\iff c_1 = \frac{q}{1-p} = 1. \\
\alpha_{n-1} = q\alpha_{n-2} &\iff c_1 + (n-1)c_2 = q \cdot (c_1 + (n-2)c_2 \\
&\iff 1 + (n-1)c_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + (n-2)c_2) \\
&\iff \left((n-1) - \frac{1}{2}(n-2)\right) c_2 = \frac{1}{2} - 1 \\
&\iff c_2 = -\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\alpha_i = c_1 + c_2 \cdot i = 1 - \frac{i}{n} = \frac{n-i}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dies bedeutet, dass bei einem fairen Spiel ($p = q = \frac{1}{2}$) die Ruinwahrscheinlichkeit für denjenigen (Bank oder Spieler) größer ist, der mit weniger Startkapital anfängt.

21.36 Beispiel (Grenzverhalten eines Verzweigungsprozesses):
In der Einleitung wurde festgestellt, dass sich die Dynamik eines Verzweigungsprozesses durch die Rekursion

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),\ X_0 \equiv 1,$$

beschreiben lässt (vgl. Beispiel 21.10), wobei die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen bilden mit

$$P(\xi_i = k) =: p_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Es soll zunächst untersucht werden, wie sich die mittlere Population $\mathbf{E}[X_n]$ für $n \to \infty$ verhält. Dazu werden die erzeugenden Funktionen

$$G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \mathbf{E}\left[z^{\xi_1}\right], \quad |z| \leq 1,$$

und

$$G_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) \cdot z^k = \mathbf{E}\left[z^{X_n}\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eingeführt. Wegen $X_0 \equiv 1$ ist

$$G_0(z) = P(X_0 = 1) \cdot z = z$$

und wegen $P(X_1 = k) = P(\xi_1 = k)$ ist

$$G_1(z) = G(z).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k) \cdot z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k \mid X_n = j) \cdot P(X_n = j) \cdot z^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_j = k) \cdot z^k}_{\text{erzeugende Funktion von } \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j) \cdot [G(z)]^j \\
&= G_n(G(z)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Es soll nun der Erwartungswert von X_n , $n = 1, 2, \ldots$, berechnet werden. Dazu wird

$$\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[\xi_1] := m$$

gesetzt. Beachte dabei

$$\mathbf{E}[X_n] = G'_n(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Um $\mathbf{E}[X_n] = G'_n(1)$ zu berechnen, wird die Rekursion

$$G_{n+1}(z) = G_n(G(z)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

benutzt. Durch Differentation erhält man:

$$G'_{n+1}(z) = G'_n(G(z)) \cdot G'(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hieraus folgt wegen $G(1) = 1$:

$$G'_{n+1}(1) = G'_n(1) \cdot G'(1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
G'_{n+1}(1) &= G'_n(1) \cdot G'(1) = G'_{n-1}(1) \cdot [G'(1)]^2 = G'_{n-2}(1) \cdot [G'(1)]^3 \\
&= \ldots = G'_1(1) \cdot [G'(1)]^n = [G'(1)]^{n+1}
\end{aligned}$$

und folglich

$$\mathbf{E}[X_{n+1}] = m^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}[X_\infty] = \begin{cases} 0 \ , & m < 1 \\ 1 \ , & m = 1 \\ \infty \ , & m > 1. \end{cases}$$

Abschließend soll nun die Aussterbewahrscheinlichkeit

$$q_n := P(X_n = 0)$$

berechnet werden. Es wird sich zeigen, dass sich diese mit Hilfe der erzeugenden Funktion berechnen lässt. Ausgangspunkt der Untersuchung sind die Gleichungen:

$$G_{n+1}(z) = G_n(G(z)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{21.6}$$
$$G_0(z) = z, \tag{21.7}$$
$$G_1(z) = G(z). \tag{21.8}$$

Damit ergibt sich:

$$G_{n+1}(z) \overset{(21.6)}{=} G_n(G(z)) \overset{(21.6)}{=} G_{n-1}(G(G(z))) \overset{(21.8)}{=} G_{n-1}(G_1(G(z))) \overset{(21.6)}{=} G_{n-1}(G_2(z))$$
$$G_{n+1}(z) \overset{(21.6)}{=} G_{n-2}(G(G(G(z)))) \overset{(21.6)}{=} G_{n-2}(G_2(G(z))) \overset{(21.6)}{=} G_{n-2}(G_3(z)).$$

Allgemein gilt folglich

$$G_{n+1}(z) = G_{n-k}(G_{k+1}(z))$$

und speziell für $k := n - 1$

$$G_{n+1}(z) = G(G_n(z)) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mit $q_n := P(X_n = 0) = G_n(0)$ folgt

$$q_{n+1} = G(q_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es sei nun $0 < p_0 = P(\text{kein Nachkomme}) < 1$. Die Folge $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton wachsend, da $G(z)$ für $z > 0$ monoton wächst (Potenzreihe mit ausschließlich nichtnegativen Koeffizienten).

$$\begin{aligned} q_1 &= G_1(0) = p_0 > 0 \\ q_2 &= G(q_1) \geq G(0) = P(X_1 = 0) = q_1 \\ &\vdots \\ q_n &= G(q_{n-1}) \overset{I.V.}{\geq} G(q_{n-2}) = q_{n-1}. \end{aligned}$$

Da die Folge $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ nach oben durch die 1 beschränkt ist, konvergiert sie mit Grenzwert $\alpha := \lim_{n\to\infty} q_n$, wobei sich α als Lösung der Gleichung

$$\alpha = G(\alpha)$$

herausstellt (Satz von der monotonen Konvergenz). Dabei gilt

$$\alpha \in (0, 1) \quad \text{für} \quad G'(1) = m > 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = 1 \quad \text{für} \quad G'(1) = m < 1.$$

21.5 Periodische Markovketten

In diesem Abschnitt wird allgemein vorausgesetzt, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine über dem Zustandsraum E irreduzible, d–periodische Markovkette mit $d \geq 2$ ist. (In Satz 21.23 wurde gezeigt, dass d–Periodizität eine Klasseneigenschaft ist.) Da nach Definition d die minimale Periode aller Zustände ist, gibt es für alle $i, j \in E$ ein solches $c_{ij} \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, dass $P_{ij}^{(m)} = 0$ für alle $m \neq c_{ij} \bmod d$ gilt. Für die c_{ij} gilt offensichtlich $c_{ii} = 0$ sowie $c_{ji} = d - c_{ij}$. Es sei daran erinnert, dass nach Satz 21.25

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd+c_{ij})} = \frac{d}{\mu_{jj}}$$

gilt, falls E rekurrent ist (dann ist $f_{ij}^* = 1$ für alle i, j). Es soll nun zunächst die spezielle Blockstruktur der Übergangsmatrix analysiert werden.

21.37 Satz:
Es gibt derartige Teilmengen $E_0, E_1, \ldots, E_{d-1}$ von E mit $E_i \cap E_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$ und $E = \bigcup_{i=0}^{d-1} E_i$, dass $P_{ij} > 0$ höchstens für $i \in E_{k-1}$ und $j \in E_k$ $(k < d)$ oder $i \in E_{d-1}$ und $j \in E_0$ gilt. Bei geeigneter Anordnung ergibt sich

$$P = \begin{pmatrix} 0 & B_{01} & & & \\ & 0 & B_{12} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & B_{d-2,d-1} \\ B_{d-1,0} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit gegebenenfalls unendlich großen Blockmatrizen $B_{k-1,k}$ $(k < d)$ und $B_{d-1,0}$.

Beweis:
Man fixiere einen Zustand i und setze $E_r = \{j \in E : \ c_{ij} = r\}$ für alle $r = 0, 1, \ldots, d-1$. Da jedem Zustand j genau ein Wert c_{ij} zugeordnet wurde, ergibt sich so eine Partition von E. Aus der Definition der c_{ij} wird sofort klar, dass es sich dabei um eine Partition mit den geforderten Eigenschaften handelt. ■

Es wird nun $\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$ für positiv rekurrente Zustände und $\pi_j = 0$ im Übrigen gesetzt, wobei μ_{jj} wie üblich die mittlere Rückkehrzeit in den Zustand j bezeichnet. In Satz 21.32 wurde für aperiodische Markovketten gezeigt, dass $\pi = (\pi_j)_{j\in E}$ die einzige normierte Lösung von $u = uP$ ist. Dieser Sachverhalt gilt jedoch auch für periodische Ketten.

21.38 Satz:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine über dem Zustandsraum E irreduzible, d–periodische Markovkette mit $d \geq 2$. Für jede nichtnegative, summierbare Lösung $u = (u_i)_{i\in E}$ von

$$u_i = \sum_{k\in E} u_k P_{ki} \qquad (i \in E),$$

kurz $u = uP$, gilt $u_i = c\pi_i$ $(i \in E)$ mit einer Konstanten c.
Ist E null–rekurrent oder transient, so ist $u_i = 0$ für alle i; ist E positiv rekurrent, so definiert $(\pi_i)_{i\in E}$ eine stationäre Verteilung. Es gilt dann

$$\sum_{i\in E_r} \pi_i = \frac{1}{d} \qquad (r = 0, 1, \ldots, d-1) \qquad \text{und} \qquad \sum_{i\in E} \pi_i = 1.$$

Dabei sind die Mengen $E_0, E_1, \ldots, E_{d-1}$ wie in Satz 21.37 zu wählen.

Beweis:
Die Definition der Mengen E_r im Beweis von Satz 21.37 ist von i abhängig, zur genaueren Betrachtung werden sie hier mit $E_r(i)$ bezeichnet. Da $P_{ki} > 0$ höchstens dann eintreten kann, wenn $k \in E_{d-1}(i)$ ist, gilt nach der Gleichung von Chapman–Kolmogorov

$$P_{ii}^{(nd)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(nd-1)} P_{ki} = \sum_{k \in E_{d-1}(i)} P_{ik}^{(nd-1)} P_{ki}.$$

Das Lemma von Fatou und Satz 21.25 über das Grenzverhalten von Markovketten liefern nun

$$d\pi_i = \lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} \geq \sum_{k \in E_{d-1}(i)} \lim_{n\to\infty} P_{ik}^{(nd-1)} P_{ki} = \sum_{k \in E} d\pi_k P_{ki},$$

also

$$\pi_i \geq \sum_{k \in E} \pi_k P_{ki} \tag{21.9}$$

für alle $i \in E$. Nach dem Lemma von Fatou gilt auch für alle $r = 0, 1, \ldots, d-1$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j \in E_r(i)} P_{ij}^{(nd+r)} \geq \sum_{j \in E_r(i)} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{j \in E_r(i)} d\pi_j,$$

also

$$\sum_{j \in E_r(i)} \pi_j \leq \frac{1}{d} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j \in E} \pi_j \leq 1.$$

Somit konvergiert die Summe der π_j und Summation von (21.9) liefert

$$\sum_{i \in E} \pi_i \geq \sum_{i \in E} \sum_{k \in E} \pi_k P_{ki} = \sum_{k \in E} \pi_k \sum_{i \in E} P_{ki} = \sum_{k \in E} \pi_k.$$

Da beide Seiten gleich und endlich sind, muss für alle $i \in E$ in (21.9) Gleichheit bestehen. Somit ist $u_i = \pi_i$ eine Lösung des Gleichungssystems $u = uP$.
Es soll nun gezeigt werden, dass alle summierbaren Lösungen konstante Vielfache von π sind. Es sei also $(u_i)_{i \in E}$ eine Lösung von $u = uP$ mit $u_i \geq 0$ und $\sum_{i \in E} u_i < \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt durch Iteration $u = uP^{(n)}$ und für jedes $r = 0, 1, \ldots, d-1$ gilt

$$u_i = \sum_{k \in E_{d-r}(i)} u_k P_{ki}^{(nd+r)}.$$

Da (u_k) summierbar ist, folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$u_i = \left(\sum_{k \in E_{d-r}(i)} u_k \right) d\pi_i. \tag{21.10}$$

Die eingeklammerte Summe hängt offensichtlich nicht mehr von r ab, damit auch nicht von i (Änderung von i liefert lediglich eine Umnummerierung der E_r) und es folgt $u_i = c\pi_i$. Insbesondere ist für nullrekurrentes oder transientes E $u = 0$ die einzige nichtnegative summierbare Lösung von $u = uP$.

Im Fall positiver Rekurrenz ist $u_i = \pi_i > 0$ eine summierbare Lösung. Einsetzen in (21.10) und Division durch π_i liefern

$$d \sum_{k \in E_{d-r}(i)} \pi_k = 1$$

bzw.

$$\sum_{k \in E_r} \pi_k = \frac{1}{d} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k \in E} \pi_k = 1.$$

21.39 Bemerkung:
Die Sätze 21.32 und 21.38 liefern zusammen ein einfaches Kriterium für positive Rekurrenz. Genau dann ist eine irreduzible Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent, wenn das Gleichungssystem $u = uP$ eine strikt positive und summierbare Lösung u besitzt.
Im Fall positiver Rekurrenz ist stets $\pi = (\pi_i)_{i\in E}$ mit $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$ die einzige durch $\sum \pi_i = 1$ normierte Lösung, d.h. die einzige stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Der Unterschied zwischen periodischen und aperiodischen Ketten besteht in der Grenzverteilung, d.h. den Werten

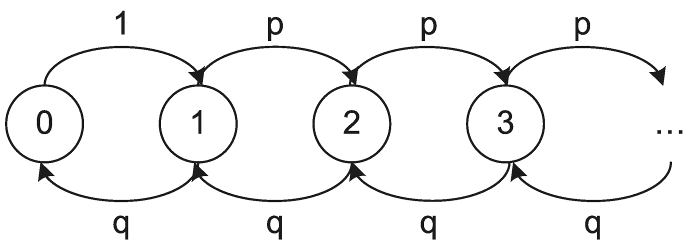
$$g_j := \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}.$$

Im aperiodischen Fall ist die stationäre Verteilung auch die Grenzverteilung, im periodischen Fall existiert keine Grenzverteilung, es existieren nur Grenzwerte von Teilfolgen.

21.40 Beispiel (Eindimensionale Irrfahrt):
Als Anwendungsbeispiel für Satz 21.38 wird die eindimensionale Irrfahrt auf der Menge $\mathbb{N}_0$ mit der Besonderheit $p + q = 1$ betrachtet. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $E := \mathbb{N}_0$ und Einschritt–Übergangswahrscheinlichkeit

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ q & 0 & p & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

wobei $p + q = 1$ gilt. Der zugehörige Markovgraph hat die Form



Offensichtlich ist die Markovkette irreduzibel und 2–periodisch. Da nur Übergänge zu den Nachbarzuständen erlaubt sind, reduziert sich das System der stationären Gleichungen

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot P_{kj} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

auf eine lineare Rekursion zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= q\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + q\pi_2 \\
\pi_2 &= p\pi_1 + q\pi_3 \\
&\vdots \\
\pi_j &= p\pi_{j-1} + q\pi_{j+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dieses System lässt sich rekursiv lösen, es gilt (durch Induktion)

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{q} \cdot \pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{1}{q} \cdot [\pi_1 - \pi_0] = \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{1}{q} \cdot \pi_0 - \pi_0\right] = \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{1-q}{q}\right] \cdot \pi_0 = \frac{p}{q^2} \cdot \pi_0 \\
&\vdots \\
\pi_{j+1} &= \frac{1}{q} \cdot \left[\frac{p^{j-1}}{q^j} \cdot \pi_0\right] - \frac{p}{q} \cdot \left[\frac{p^{j-2}}{q^{j-1}} \cdot \pi_0\right] \\
&= \left(\frac{1}{q} - 1\right) \cdot \left(\frac{p^{j-1}}{q^j}\right) \cdot \pi_0 = \left(\frac{p^j}{q^{j+1}}\right) \cdot \pi_0. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

π_0 berechnet man mit Hilfe der Normierungsbedingung $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$, es muss also

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \cdot \left[1 + \frac{1}{q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}\right] = \pi_0 \cdot \left[1 + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)}\right] \\
&= \frac{2q}{q-p} \cdot \pi_0,
\end{aligned}$$

gelten, woraus

$$\pi_0 = \frac{q-p}{2q}$$

folgt. Diese Beziehung zeigt, dass genau im Fall $q > p$ eine stationäre Verteilung existiert.

21.6 Kriterien für Rekurrenz und Transienz

Ein wichtiges Kriterium für positive Rekurrenz wurde bereits gezeigt: Genau dann liegt positive Rekurrenz vor, wenn das Gleichungssystem $u = uP$ eine nichtnegative, von Null verschiedene und summierbare Lösung besitzt. Es gibt jedoch weitere einfache Kriterien für Rekurrenz bzw. Transienz. Zunächst werden zwei Hilfsaussagen gezeigt.

21.41 Lemma:
Es sei E irreduzibel und $i \in E$ beliebig. Genau dann ist E rekurrent, wenn $f_{ji}^* = 1$ für alle $j \neq i$ ist.

Beweis:
Ist E rekurrent, so folgt die Aussage unmittelbar aus Satz 21.22. Ist umgekehrt $f_{ji}^* = 1$ für alle $j \neq i$, so gilt

$$f_{ii}^* = P_{ii} + \sum_{j \neq i} P_{ij} f_{ji}^* = \sum_{j \in E} P_{ij} = 1,$$

d.h. i ist rekurrent. ∎

21.42 Lemma:
Es sei $A \subset E$ und $q(i) = P(X_n \in A \ \forall n \geq 1 \mid X_0 = i)$ für alle $i \in A$. Dann wird das Gleichungssystem

$$h_i = \sum_{j \in A} P_{ij} h_j, \quad 0 \leq h_i \leq 1, \quad i \in A,$$

durch $h_i = q(i)$ gelöst und für jede weitere Lösung des Systems gilt $h_i \leq q(i)$ für alle $i \in A$.

Beweis:
Definiere die $|A| \times |A|$–Matrix Q als $Q = P|_{A \times A}$ sowie

$$\begin{aligned}
q_n(i) &= P(X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_n \in A \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_n \in A} P(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_n \in A} P(X_1 = j_1 \mid X_0 = i) \cdot \ldots \cdot P(X_n = j_n \mid X_{n-1} = j_{n-1}) \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_n \in A} Q_{i,j_1} \cdot \ldots \cdot Q_{j_{n-1}, j_n} \\
&= \sum_{j \in A} Q_{ij}^n.
\end{aligned}$$

Offensichtlich fallen die q_n monoton in n, d.h. $q_{n+1}(i) \leq q_n(i)$ und es gilt wegen der Stetigkeit von oben

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} q_n(i) &= \lim_{n \to \infty} P(X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_n \in A \mid X_0 = i) \\
&= P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \{X_1 \in A, \ldots, X_n \in A\} \middle| X_0 = i \right) \\
&= P(X_n \in A \ \forall n \geq 1 \mid X_0 = i) = q(i).
\end{aligned}$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz zeigt nun, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in A} Q_{ij} q(j) &= \sum_{j \in A} Q_{ij} \lim_{n \to \infty} q_n(j) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in A} Q_{ij} \sum_{k \in A} Q_{jk}^n \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in A} Q_{ik}^{n+1} = \lim_{n \to \infty} q_{n+1}(i) = q(i), \quad i \in A,
\end{aligned}$$

gilt, d.h. $\{q(i)\}$ ist eine Lösung des Gleichungssystems. Natürlich gilt auch $0 \leq q(i) \leq 1$ für alle $i \in A$.
Sei nun h irgendeine weitere Lösung mit $0 \leq h_i \leq 1$. Durch wiederholtes Einsetzen ergibt sich

$$h_i = \sum_{j \in A} Q_{ij} h_j = \sum_{j \in A} Q_{ij}^n h_j \leq \sum_{j \in A} Q_{ij}^n = q_n(i), \quad i \in A,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $h_i \leq q(i)$. ∎

21.43 Satz (Rekurrenz– und Transienzkriterium):
Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit irreduziblem Zustandsraum E. Betrachte das Gleichungssystem

$$h_i = \sum_{j \neq i_0} P_{ij} h_j, \quad 0 \leq h_i \leq 1, \quad i \in E \setminus \{i_0\}. \tag{21.11}$$

a) *Gibt es ein solches i_0, dass (21.11) nur die Lösung $h \equiv 0$ besitzt, so ist E rekurrent.*

b) *Gibt es ein solches i_0, dass (21.11) eine von Null verschiedene Lösung h besitzt, so ist E transient.*

Beweis:
Nach Lemma 21.42 ist $q(i)$ stets die punktweise größte Lösung des Gleichungssystems. Hier gilt $A = E \setminus \{i_0\}$, also

$$q(i) = P(X_n \in A \ \forall n \geq 1 \mid X_0 = i) = P(X_n \neq i_0 \ \forall n \geq 1 \mid X_0 = i) = 1 - f_{i,i_0}^*.$$

Daher ist $h \equiv 0$ genau dann die einzige Lösung, wenn $f_{i,i_0}^* = 1$ für alle $i \neq i_0$ ist. Dies ist wiederum nach Lemma 21.41 genau dann der Fall, wenn Rekurrenz vorliegt. ∎

21.44 Beispiel:
Betrachte wieder das Beispiel der eindimensionalen Irrfahrt aus Beispiel 21.40, also

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ q & 0 & p & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Es wurde bereits gezeigt, dass genau für $q > p$ eine stationäre Verteilung existiert, also positive Rekurrenz vorliegt. Es soll nun gezeigt werden, dass für $q = p$ Null–Rekurrenz und für $q < p$ Transienz vorliegt. Dazu betrachte man das Gleichungssystem (21.11) für $i_0 = 0$, also

$$h_i = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} h_j, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{21.12}$$

Es folgt $h_1 = ph_2$ sowie $h_k = qh_{k-1} + ph_{k+1}$ für $k \geq 2$ bzw.

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{p} h_1 \\ h_n &= \frac{1}{p}(h_{n-1} - qh_{n-2}) \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Wegen $q = 1 - p$ folgt $h_2 - h_1 = \frac{1}{p}h_1 - h_1 = \frac{q}{p}h_1$ und für $n \geq 3$

$$h_n - h_{n-1} = \frac{1}{p}(h_{n-1} - qh_{n-2}) - h_{n-1} = \frac{1}{p}((1-p)h_{n-1} - qh_{n-2}) = \frac{q}{p}(h_{n-1} - h_{n-2}),$$

durch Induktion folgt

$$h_n - h_{n-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} h_1 \quad (n \geq 2)$$

und Summation liefert schließlich

$$h_n = h_1 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{j-1} \quad (n \geq 1).$$

Für $h_1 \neq 0$ und $q = p$ wächst h_n damit unbeschränkt. Die einzige beschränkte Lösung des Gleichungssystems (21.12) ist also $h \equiv 0$ und es folgt Rekurrenz (da positive Rekurrenz nur für $q > p$ vorliegt, handelt es sich hier um Null–Rekurrenz). Für $q < p$ hingegen konvergiert h_n offensichtlich und ist daher beschränkt. Durch geeignete Wahl von $h_1 \neq 0$ kann so eine nichttriviale Lösung von (21.12) gefunden werden und es folgt Transienz.

Das nächste Kriterium scheint Satz 21.43 sehr ähnlich, der Unterschied bei der Summation ist allerdings wesentlich.

21.45 Satz (Transienzkriterium):
Genau dann ist die über E irreduzible Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ transient, wenn es ein solches $i_0 \in E$ gibt, dass das Gleichungssystem

$$h_i = \sum_{j\in E} P_{ij} h_j, \qquad i \neq i_0 \tag{21.13}$$

eine beschränkte nichtkonstante Lösung besitzt.

Beweis:
Wir definieren eine neue Markovkette mit Übergangsmatrix $\tilde{P}$ vermöge $\tilde{P}_{i_0,j} = \delta_{i_0,j}$ und $\tilde{P}_{ij} = P_{ij}$ für $i \neq i_0$, d.h. bei entsprechender Anordnung ist

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ P_{i_1,i_0} & P_{i_1,i_1} & P_{i_1,i_2} & \dots \\ P_{i_2,i_0} & P_{i_2,i_1} & P_{i_2,i_2} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sei die ursprüngliche Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zunächst transient. Nach Lemma 21.41 gibt es dann mindestens ein j mit $f^*_{j,i_0} < 1$. In der neuen Kette sind alle Zustände außer i_0 immer noch transient, i_0 ist nun ein absorbierender Zustand. Wie in Abschnitt 21.4 bezeichnen wir mit $\alpha_j(i_0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die in j startende (modifizierte) Markovkette in i_0 absorbiert wird. Dort wurde auch gezeigt, dass für $i \notin R$

$$\alpha_i(R) = \sum_{j \in R} \tilde{P}_{ij} + \sum_{j \in T} \tilde{P}_{ij} \alpha_j(R)$$

gilt, falls R die Menge der absorbierenden und T die Menge aller transienten Zustände ist. Hier gilt speziell $R = \{i_0\}$ und $T = E \setminus \{i_0\}$ und wegen $\alpha_{i_0}(i_0) = 1$ folgt

$$\alpha_i(i_0) = \sum_{j \in E} \tilde{P}_{ij} \alpha_j(i_0) = \sum_{j \in E} P_{ij} \alpha_j(i_0)$$

für alle $i \neq i_0$. Die Absorptionswahrscheinlichkeiten $\alpha_i(i_0)$ lösen also das Gleichungssystem (21.13) und sind wegen $\alpha_{i_0}(i_0) = 1$ und $\alpha_j(i_0) = f^*_{j,i_0} < 1$ für ein $j \in E$ nicht konstant.
Sei nun umgekehrt $\{h_i\}$ eine nichtkonstante beschränkte Lösung von (21.13). Da jedes Vielfache von $h = (h_i)_{i \in E}$ ebenfalls eine Lösung ist und da jeder konstante Vektor eine triviale Lösung darstellt, ist auch

$$h_i' = a h_i + b$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ eine (nichtkonstante) Lösung von (21.13). Für geeignete a, b gilt $h'_{i_0} = 1$ und $0 \leq h_i' \leq 2$ für alle $i \in E$, so dass von nun an $h_{i_0} = 1$ und $0 \leq h_i \leq 2$ gelten möge. Ferner sei stets $h_k < 1$ für mindestens ein $k \neq i_0$ ($h_k = 1$ für alle k ist ausgeschlossen, da h nicht konstant ist; sind alle $h_k \geq 1$, so betrachte die Lösung $h_k' = 2 - h_k$).
Dann gilt nach Definition der $\tilde{P}_{ij}$ für alle $i \in E$, insbesondere auch für $i = i_0$,

$$h_i = \sum_{j \in E} \tilde{P}_{ij} h_j \qquad \text{bzw.} \qquad h_i = \sum_{j \in E} \tilde{P}^{(n)}_{ij} h_j,$$

was auf

$$\tilde{P}^{(n)}_{i,i_0} = \tilde{P}^{(n)}_{i,i_0} h_{i_0} \leq \sum_{j \in E} \tilde{P}^{(n)}_{ij} h_j = h_i \tag{21.14}$$

für alle $i \in E$ führt. Bezeichnet wie in Abschnitt 21.4 $\alpha_i^{(n)}(i_0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die in i startende Markovkette genau nach n Schritten den Zustand i_0 erreicht und dort absorbiert wird, gilt

$$\tilde{P}^{(n)}_{i,i_0} = \sum_{m=0}^{n} \alpha_i^{(m)}(i_0) \tilde{P}^{(n-m)}_{i_0,i_0} = \sum_{m=0}^{n} \alpha_i^{(m)}(i_0),$$

also

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{P}^{(n)}_{i,i_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_i^{(m)}(i_0) = \alpha_i(i_0)$$

und $n \to \infty$ in (21.14) führt auf

$$\alpha_i(i_0) \leq h_i$$

für alle $i \in E$. Betrachte nun $k \neq i_0$ mit $h_k < 1$ (existiert, s.o.). Die Absorptionswahrscheinlichkeit $\alpha_k(i_0)$ in der modifizierten Markovkette entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand i_0 von k ausgehend jemals erreicht wird, also $f^*_{k,i_0} \leq h_k < 1$. Die Wahrscheinlichkeit f^*_{k,i_0} ist offensichtlich für die ursprüngliche Markovkette genau so groß wie für die modifizierte Kette und mit Lemma 21.41 folgt Transienz. ■

Der nachstehende Satz beruht wieder auf dem Gleichungssystem (21.13) und liefert ein hinreichendes Kriterium für Rekurrenz.

21.46 Satz (Rekurrenzkriterium):
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette über $\mathbb{N}_0$ und $i_0 \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Existiert für das Ungleichungssystem

$$h_i \geq \sum_{j\in\mathbb{N}_0} P_{ij} h_j, \qquad i \neq i_0 \tag{21.15}$$

eine Lösung h mit $h_i \to \infty$ für $i \to \infty$, so ist die Markovkette rekurrent.

Beweis:
Da mit h auch $ah + b$ eine Lösung des Ungleichungssystems ist, kann o.B.d.A. $h_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $h_{i_0} = 1$ vorausgesetzt werden. Wir nehmen $i_0 = 0$ an, was durch Umnummerierung stets erreicht werden kann. Mit der Übergangsmatrix $\tilde{P}$ aus dem Beweis von Satz 21.45 gilt wieder für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$h_i \geq \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \tilde{P}_{ij} h_j \qquad \text{und weiter} \qquad h_i \geq \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \tilde{P}_{ij}^{(n)} h_j.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle nun $M = M(\varepsilon)$ so, dass $\frac{1}{h_i} \leq \varepsilon$ für alle $i \geq M$ ist. Unter Verwendung von $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} \tilde{P}_{ij}^{(m)} = 1$ folgt

$$\begin{aligned} h_i &\geq \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}^{(m)} h_j + \sum_{j=M}^{\infty} \tilde{P}_{ij}^{(m)} h_j \geq \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}^{(m)} h_j + \min_{k\geq M}\{h_k\} \sum_{j=M}^{\infty} \tilde{P}_{ij}^{(m)} \\ &\geq \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}^{(m)} h_j + \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}^{(m)}\right). \end{aligned}$$

Da in der modifierten Markovkette alle Zustände außer 0 transient sind (der absorbierende Zustand 0 ist von allen Zuständen aus erreichbar), folgt mit Satz 21.25 über das Grenzverhalten von Markovketten sowie den Überlegungen aus dem Beweis von Satz 21.45

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_{ij}^{(n)} = 0, \qquad j \neq 0, \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \tilde{P}_{i0}^{(n)} = \alpha_i(0).$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert also

$$h_i \geq \alpha_i(0) h_0 + \frac{1}{\varepsilon}(1 - \alpha_i(0)) \geq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \alpha_i(0))$$

bzw.

$$1 - \alpha_i(0) \leq \varepsilon h_i$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war und $\alpha_i(0) \leq 1$ ist, folgt $\alpha_i(0) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Da (wie im vorangegangenen Beweis zu Satz 21.45) $\alpha_i(0) = f_{i0}^*$ für $i \neq 0$ gilt, folgt $f_{i0}^* = 1$ und mit Lemma 21.41 Rekurrenz. ■

21.47 Bemerkung:
Die Voraussetzung $E = \mathbb{N}_0$ in Satz 21.46 ist nötig, um den Grenzübergang $i \to \infty$ formulieren zu können. Da die Zustände jedes abzählbar unendlichen Raumes entsprechend durchnummeriert werden können, handelt es sich um keine echte Einschränkung.

Die Rekurrenz– und Transienzkriterien sollen nun noch anhand einiger Beispiele erläutert werden.

21.48 Beispiel (Diskrete Warteschlange I):
Es wird ein Bediensystem mit einer deterministischen, getakteten Bedienung betrachtet, d.h. in jedem Zeitintervall $[n, n+1)$ wird genau ein Kunde bedient, sofern mindestens einer wartet. Währenddessen kommen Y_n Kunden an; die Zufallsgrößen $Y_0, Y_1, \ldots$ seien i.i.d. Es sei $P(Y_n = k) = a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Zählt X_n die wartenden Kunden zum Zeitpunkt n (unmittelbar vor Beginn der Bedienung), so ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine diskrete homogene Markovkette mit der Einschritt-Übergangswahrscheinlichkeit

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und aperiodisch. Zur besseren Übersicht wird die erzeugende Funktion

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eingeführt, die zumindest auf $[-1, 1]$ konvergiert. Auf $(-1, 1)$ darf dann auch beliebig oft (gliedweise) differenziert werden. Da alle Koeffizienten positiv sind, folgt $A'(\xi) > 0$ und $A''(\xi) > 0$ für alle $\xi \in (0, 1)$, d.h. A ist auf $[0, 1]$ monoton wachsend und konvex. Existiert $A'(1)$, so gilt

$$A'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k = E[Y_1] =: \mu,$$

insbesondere ist dann $\mu < \infty$.
Zur Untersuchung auf Transienz wenden wir Satz 21.45 mit $i_0 = 0$ an, d.h. wir betrachten das Gleichungssystem

$$h_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} h_j, \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{21.16}$$

Existiert eine nichtkonstante beschränkte Lösung h, so liegt Transienz vor. Der Ansatz $h_j = \xi^j$ führt für $i \geq 1$ zu dem System

$$\xi^i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} \xi^j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \xi^j,$$

bzw. zu der Fixpunktgleichung

$$\xi = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \xi^{j-i+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k = A(\xi).$$

Mit anderen Worten, der Ansatz $h_j = \xi^j$ liefert eine nichtkonstante beschränkte Lösung, falls A einen Fixpunkt $\xi \in (0,1)$ besitzt. Wegen $A(0) = a_0 \in (0,1)$ und $A(1) = 1$ und der Konvexität von A existiert ein solcher Fixpunkt für $\mu \in (1,\infty]$. In diesem Fall ist die Markovkette also transient.
Obwohl das Kriterium aus Satz 21.45 eine „genau dann, wenn"–Aussage darstellte, lässt sich mit diesen Überlegungen nicht zeigen, dass für $\mu \in (0,1]$ Rekurrenz vorliegt, da die Wahl $h_j = \xi^j$ nicht notwendig war. Zum Nachweis der Rekurrenz wird nun das Rekurrenzkriterium aus Satz 21.46 verwendet. Es werden deshalb unbeschränkt wachsende Lösungen von

$$h_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} h_j, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

gesucht (wie oben wird $i_0 = 0$ gewählt), dabei sei $\mu = \sum k a_k \leq 1$. Dann führt der Ansatz $h_j = j$ auf eine Lösung der gewünschten Form. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} h_j &= \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \cdot j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \cdot (j-i+1) + \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \cdot (i-1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k + (i-1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq 1 + i - 1 = i\end{aligned}$$

für alle $i = 1, 2, \ldots$.
Die hier beschriebene Markovkette wird im Rahmen der Markovschen Erneuerungstheorie noch einmal aufgegriffen (M/G/1–System, Kapitel 23.6). Dort wird gezeigt, dass für $\mu = 1$ Nullrekurrenz und für $\mu < 1$ sogar positive Rekurrenz vorliegt.

21.49 Beispiel (Diskrete Warteschlange II):
Es soll nun ein Bediensystem mit umgekehrter Taktung untersucht werden. In jeder Zeiteinheit kommt ein Kunde an, währenddessen werden k Kunden mit Wahrscheinlichkeit $a_k > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ bedient. Warten weniger als k Kunden, werden alle Kunden bedient. Die Anzahl X_n der zum Zeitpunkt n wartenden Kunden bildet wieder eine irreduzible und aperiodische Markovkette mit der Einschritt-Übergangswahrscheinlichkeit

$$P = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} a_i & a_0 & & & \\ \sum_{i=2}^{\infty} a_i & a_1 & a_0 & & \\ \sum_{i=3}^{\infty} a_i & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Zunächst soll die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf positive Rekurrenz untersucht werden, d.h. es wird das Gleichungssystem

$$u_j = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} u_i P_{ij}, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

betrachtet. Der Ansatz $u_i = \xi^i$ führt für $j \geq 1$ auf

$$\xi^j = \sum_{i=j-1}^{\infty} \xi^i a_{i-j+1} = \xi^{j-1} \sum_{i=j-1}^{\infty} a_{i-j+1} \xi^{i-j+1} = \xi^{j-1} A(\xi),$$

wobei

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

wie im vorangegangenen Beispiel. Division durch ξ^{j-1} liefert wieder die Fixpunktgleichung $A(\xi) = \xi$, die für $\mu = \sum k a_k \in (1, \infty]$ einen Fixpunkt $\xi \in (0,1)$ besitzt. In diesem Fall ist auch die zu $j = 0$ gehörende Gleichung des Systems erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i P_{i0} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k \xi^i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \xi^i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1-\xi^k}{1-\xi} \\ &= \frac{1}{1-\xi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \right) = \frac{1}{1-\xi} (1 - A(\xi)) = 1.\end{aligned}$$

Für $\mu \in (1, \infty]$ liegt also positive Rekurrenz vor. Für $\mu \leq 1$ liegt hingegen keine positive Rekurrenz vor, denn hätte das System

$$u_j = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} u_i P_{ij} = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} u_i a_{i-j+1}, \quad j \geq 1$$

eine strikt positive und summierbare Lösung u, so wäre u auch beschränkt und nicht konstant. Dann hätte das Gleichungssystem (21.16) aus dem vorangegangenen Beispiel auch in diesem Fall eine beschränkte Lösung gehabt und es müsste Transienz vorliegen; dort wurde jedoch Rekurrenz nachgewiesen.
Es soll nun gezeigt werden, dass für $\mu = 1$ noch Rekurrenz vorliegt und für $\mu < 1$ Transienz. Nach Satz 21.45 wird das System

$$h_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} h_j, \quad i \neq 0$$

untersucht und die Existenz einer beschränkten nichtkonstanten Lösung genau für $\mu < 1$ gezeigt. Da jede Konstante das System ebenfalls löst, gibt es im Existenzfall auch eine Lösung mit $h_0 = 0$. Mit dieser zusätzlichen Festlegung kann der Koeffizient vor h_0 dann beliebig verändert werden, etwa kann P_{i0} im Gleichungssystem durch a_{i+1} ersetzt werden. Es folgt

$$h_i = \sum_{j=0}^{i+1} a_{i+1-j} h_j, \quad i \geq 1.$$

Multiplikation aller Gleichungen mit s^{i+1} und Summation ergibt

$$\begin{aligned}s \cdot \sum_{i=1}^{\infty} h_i s^i &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i+1} a_{i+1-j} h_j s^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i+1} a_{i+1-j} s^{i+1-j} h_j s^j - s a_0 h_1 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j \sum_{i=j-1}^{\infty} a_{i+1-j} s^{i+1-j} - s a_0 h_1 = \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i - s a_0 h_1.\end{aligned}$$

Für die erzeugenden Funktionen

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \qquad \text{und} \qquad A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

folgt

$$sH(s) = H(s)A(s) - sa_0h_1 \qquad \text{bzw.} \qquad H(s) = \frac{sa_0h_1}{A(s)-s}. \tag{21.17}$$

Nach den vorangegangenen Überlegungen folgt aus $\mu \leq 1$, dass $A(s) - s \neq 0$ für alle $s \in [0,1)$ ist. Setze nun

$$w_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i > 0 \qquad \text{und} \qquad W(s) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n,$$

ferner

$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (W(s))^k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n \qquad \text{mit} \qquad u_n \geq 0$$

und schließlich

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{und} \qquad V(s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n.$$

Es gilt dann

$$V(s)(1-s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n - \sum_{n=0}^{\infty} v_n s^{n+1} = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n = U(s).$$

Zunächst folgt wegen $A(1) = 1$

$$\begin{aligned}
A(s) - s &= (1-s)\left(1 - \frac{1-A(s)}{1-s}\right) = (1-s)\left(1 - \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j\right) \sum_{k=0}^{\infty} s^k\right) \\
&= (1-s)\left(1 - A(1)\sum_{n=0}^{\infty} s^n + \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j s^{j+k}\right) = (1-s)\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}\left(A(1) - \sum_{i=0}^{n} a_i\right) s^n\right) \\
&= (1-s)\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i s^n\right) = (1-s)\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n\right) = (1-s)(1-W(s)).
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (21.17) ein, bekommt man

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{sa_0h_1}{(1-s)(1-W(s))} = \frac{sa_0h_1}{1-s} \sum_{k=0}^{\infty} (W(s))^k \\
&= \frac{sa_0h_1}{1-s} U(s) = sa_0h_1 V(s).
\end{aligned}$$

Wegen

$$W(1) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k = \mu$$

folgt

$$U(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (W(1))^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k < \infty$$

genau für $\mu < 1$. Die Koeffizienten v_n wachsen monoton und konvergieren gegen $U(1)$, d.h. sie sind genau dann beschränkt, wenn $U(1) < \infty$ ist. Da die Koeffizienten von H und V

die gleichen Wachstumseigenschaften haben, ist damit gezeigt, dass die Koeffizienten h_i von $H(s)$ genau dann beschränkt sind, wenn $\mu < 1$ ist. Da sie für jede Wahl von $h_1 \neq 0$ auch nichtkonstant sind, liegt genau für $\mu < 1$ Transienz vor.

21.50 Bemerkung:
Die Idee hinter allen hier gezeigten Kriterien für Rekurrenz– bzw. Transienz war es, das System $h = Ph$ zu betrachten (für die Untersuchung auf positive Rekurrenz wurde $u = uP$ gelöst), dabei aber eine der Gleichungen (oder Ungleichungen) zu ignorieren. Es gibt Kriterien, bei denen auf beliebig viele Gleichungen verzichtet wird. Das zuletzt genannte Kriterium für Rekurrenz, Satz 21.46, zum Beispiel wurde wie folgt verallgemeinert:

Es sei $h : E \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion, für die jede der Mengen $\{i : h_i \leq n\}$ endlich ist (auf $E = \mathbb{N}$ entspricht dies der Forderung $h_i \to \infty$), sowie $C \subset E$ eine Teilmenge mit endlichem Komplement $E \setminus C$ und E irreduzibel. Gilt für alle $i \in C$

$$h_i \geq \sum_{j \in E} P_{ij} h_j,$$

so ist E rekurrent.

Auch beim Transienzkriterium, Satz 21.45, kann auf mehr als eine Gleichung verzichtet werden. Allerdings ergeben sich dabei einige Änderungen:

Es sei E irreduzibel. Genau dann liegt Transienz vor, wenn es eine beschränkte Folge (h_i) mit Werten in $\mathbb{R}^+$ und eine solche Zahl $r \geq 0$ gibt, dass für alle $i \in E$ zumindest eine der beiden Ungleichungen

$$h_i \leq r \qquad \text{oder} \qquad h_i < \sum_{j \in E} P_{ij} h_j$$

erfüllt ist.

Diese beiden Aussagen werden in „Markov Chains and Stochastic Stability“ von S. P. Meyn und R. L. Tweedie in einer deutlich allgemeineren Form formuliert und bewiesen.

21.7 Ergodensätze

Unter Ergodensätzen versteht man Aussagen über zeitliche Mittelwerte, also etwa die relative Häufigkeit von Aufenthalten in einem fixierten Zustand j,

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{j\}}(X_k) \,\middle|\, X_0 = i\right].$$

21.51 Satz:
Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente Markovkette über E mit Gitterkonstante d und $(\pi_j)_{j \in E}$ die zugehörige stationäre Verteilung, also $\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{j\}}(X_k) \,\middle|\, X_0 = i\right] = \pi_j.$$

Beweis:
Es ist zunächst

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{j\}}(X_k)\middle| X_0 = i\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E[1_{\{j\}}(X_k)|X_0 = i] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = j|X_0 = i). \end{aligned}$$

Ist j zunächst aperiodisch, so konvergiert $P(X_k = j|X_0 = i)$ nach Satz 21.25 über das Grenzverhalten von Markovketten gegen π_j. Die Konvergenz einer Folge zieht auch die Konvergenz der Folge der arithmetischen Mittel nach sich (Cesaro's Lemma, vgl. Stochastik II) und es folgt die Behauptung.
Sei j nun periodisch mit Periode $d \geq 2$. Wähle $c = c_{ij} < d$ so, dass $P_{ij}^{(m)} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq c \bmod d$ gilt (vergleiche Abschnitt über periodische Markovketten). Es soll nun Teil d) des Grenzwertsatzes 21.25 angewendet werden. Unter Beachtung von $f_{ij}^* = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv c \bmod d}}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{d}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{d}} \sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor} P_{ij}^{(md+c)} \\ &= \frac{1}{d}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor + 1} \sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor} P_{ij}^{(md+c)} = \frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} P_{ij}^{(md+c)} \\ &= \frac{1}{d}\frac{d}{\mu_{jj}} = \pi_j. \end{aligned}$$

■

Für $d = 1$ kann man Satz 21.51 als „Zeitmittel = Raummittel“ interpretieren. Das weitere Ziel dieses Abschnitt wird es sein, diese Aussage zu verallgemeinern.
Der nachstehende Satz lässt eine solche Interpretation zwar nicht direkt zu, ist aber von zentraler Bedeutung für alle sich anschließenden Ergodensätze und wird auch später im Rahmen der Markovschen Erneuerungstheorie verwendet.
Es sei daran erinnert, dass mit $T_n^{(j)}$ der n–ten Rückkehrzeitpunkt in den Zustand j bezeichnet wird, also

$$T_0^{(j)} = 0 \qquad \text{und} \qquad T_n^{(j)} = \inf\{k > T_{n-1}^{(j)} \mid X_k = j\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

21.52 Satz:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente Markovkette über E sowie $A(i,j)$ die erwartete Anzahl der Aufenthalte im Zustand j während eines Zyklus von i nach i, d.h. mit $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = i\} = T_1^{(i)}$ sei

$$A(i,j) = E\left[|\{X_n : 0 \leq n \leq T-1, X_n = j\}| \,\middle|\, X_0 = i\right].$$

Dann gilt $A(i,j) = \frac{\pi_j}{\pi_i}$, wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der zugrunde liegenden Markovkette (also $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}$) ist.

Beweis:
Offensichtlich ist $A(i,i) = 1$. Betrachte nun $j \in E \setminus \{i\}$ und setze $g_{ij}^{(n)}$ als Wahrscheinlichkeit, dass die in i startende Markovkette nach genau n Schritten j erreicht, ohne zwischendurch nach i zurückzukehren. Unter Verwendung der Markoveigenschaft folgt

$$\begin{aligned}
A(i,j) &= E\left[\sum_{n=1}^{T-1} 1_{\{j\}}(X_n) \mid X_0 = i\right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} P(T = m, X_n = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} P(X_1 \neq i, \ldots, X_n = j \neq i, \ldots, X_{m-1} \neq i, X_m = i \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} P(X_n = j, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i \mid X_0 = i) \\
&\qquad\qquad \cdot P(X_{n+1} \neq i, \ldots, X_{m-1} \neq i, X_m = i \mid X_n = j, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i, X_0 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} g_{ij}^{(n)} \cdot P(T = m - n \mid X_0 = j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)} \sum_{m=1}^{\infty} P(T = m \mid X_0 = j).
\end{aligned}$$

Die letzte Summe gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die in j startende Markovkette jemals i erreicht, ist also f_{ji}^*. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und positiv rekurrent ist, gilt $f_{ji}^* = 1$ (vergleiche Satz 21.22) und es wird

$$A(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)}.$$

Damit folgt (wegen $A(i,i) = 1$)

$$\begin{aligned}
A(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{ij}^{(n)} &= P_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} g_{ij}^{(n)} = P_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k\in E\setminus\{i\}} g_{ik}^{(n-1)} P_{kj} \\
&= A(i,i)P_{ij} + \sum_{k\in E\setminus\{i\}}\sum_{n=1}^{\infty} g_{ik}^{(n)} P_{kj} = \sum_{k\in E} A(i,k)P_{kj}.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der $A(i,j)$ folgt sofort, dass die Folge der $(A(i,j))_{j\in E}$ im positiv rekurrenten Fall summierbar ist (die Summe ist gerade die erwartete Zykluslänge, also die mittlere Rückkehrzeit). Da sie aber nun für jedes feste i das Gleichungssystem (21.5) der stationären Gleichungen erfüllt, stimmt sie bis auf einen konstanten Faktor mit π_j überein, also $A(i,j) = c_i \pi_j$. Wegen $A(i,i) = 1$ folgt $c_i = \frac{1}{\pi_i}$. ■

Bei der Formulierung der Ergodensätze treten <u>Kostenfunktionen</u> $f, g : E \to \mathbb{R}$ auf, die im Folgenden als Spaltenvektoren aufgefasst werden. Da π als Zeilenvektor behandelt wird, gilt insbesondere

$$\pi f = \sum_{i\in E} \pi_i f(i).$$

Es soll nun eine Verallgemeinerung von Satz 21.52 angegeben werden.

21.53 Satz:
Es sei $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\pi|f| < \infty$ für die stationäre Verteilung π der irreduziblen und positiv rekurrenten Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Y_f seien die Kosten während eines Zyklus von i nach i, also mit $T = T_1^{(i)}$

$$Y_f = \sum_{m=0}^{T-1} f(X_m).$$

Dann existiert $E[|Y_f| \mid X_0 = i]$ und es gilt

$$E[Y_f \mid X_0 = i] = \frac{\pi f}{\pi_i}.$$

Beweis:
Definiere für $j \in E$ die Indikatorfunktion $1_{\{j\}} : E \to \mathbb{R}$ durch

$$1_{\{j\}}(i) = \delta_{ij} \qquad (i \in E).$$

Nach Satz 21.52 gilt

$$E[|Y_{1_{\{j\}}}| \mid X_0 = i] = E[Y_{1_{\{j\}}} \mid X_0 = i] = A(i,j) = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

Zerlege nun

$$f = \sum_{j\in E} f(j) \cdot 1_{\{j\}}.$$

Wegen der absoluten Konvergenz $\pi|f| < \infty$ folgt dann

$$E[|Y_f| \mid X_0 = i] \leq \sum_{j\in E} E[|Y_{1_{\{j\}}}| \mid X_0 = i] \cdot |f(j)| = \frac{\pi|f|}{\pi_i} < \infty$$

und

$$E[Y_f \mid X_0 = i] = \sum_{j\in E} E[Y_{1_{\{j\}}} \mid X_0 = i] \cdot f(j) = \frac{\pi f}{\pi_i}.$$

Nun kann der erste Ergodensatz gezeigt werden.

21.54 Satz (1. Ergodensatz):
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und positiv rekurrente Markovkette mit stationärer Verteilung π. $f, g : E \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\pi|f| < \infty$ und $\pi|g| < \infty$ sowie $\pi f \neq 0$ oder $\pi g \neq 0$. Dann gilt $P - f.s.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} f(X_m)}{\sum_{m=0}^{n} g(X_m)} = \frac{\pi f}{\pi g}.$$

Beweis:
Wie üblich sei $T_n^{(j)}$ der n–te Rückkehrzeitpunkt in den Zustand j, $n = 1, 2, \ldots$. Sei nun $\ell(n)$ so gewählt, dass $T_{\ell(n)}^{(j)} \leq n < T_{\ell(n)+1}^{(j)}$ ist. Aufgrund der Voraussetzung, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrent ist, handelt es sich bei den Rückkehrzeitpunkten um einen (nicht–abbrechenden) Erneuerungsprozess und für $n \to \infty$ strebt auch $\ell(n) \to \infty$. Setze weiter

$$Y_k = \sum_{m=T_k^{(j)}}^{T_{k+1}^{(j)}-1} f(X_m), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

d.h. Y_k gibt die Kosten im k–ten Zyklus an. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein diskreter regenerativer Prozess (die $T_k^{(j)}$ sind die Regenerationszeitpunkte) und somit ist auch $f(X_n)$ ein regenerativer Prozess, d.h. die Werte $(Y_k)_{k\geq 1}$ sind i.i.d. und nach Satz 21.53 gilt $E[Y_k] = \frac{\pi f}{\pi_j}$. Mit den $(Y_k)_{k\geq 1}$ lässt sich

$$\sum_{m=0}^{n} f(X_m) = \sum_{m=0}^{T_1^{(j)}-1} f(X_m) + \sum_{k=1}^{\ell(n)-1} Y_k + \sum_{m=T_{\ell(n)}^{(j)}}^{n} f(X_m)$$

schreiben.
Sei zunächst $f \geq 0$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\ell(n)-1} Y_k \leq \sum_{m=0}^{n} f(X_m) \leq \sum_{m=0}^{T_1^{(j)}-1} f(X_m) + \sum_{k=1}^{\ell(n)} Y_k.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite hängt nicht von n ab und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=1}^{\ell(n)-1} Y_k \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{m=0}^{n} f(X_m) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=1}^{\ell(n)} Y_k.$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen haben die Grenzwerte auf beiden Seiten den gleichen Wert, nämlich $E[Y_1]$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{m=0}^{n} f(X_m) = E[Y_1] = \frac{\pi f}{\pi_j}. \tag{21.18}$$

Für nichtnegative Funktionen g folgt analog

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{m=0}^{n} g(X_m) = E[Y_1] = \frac{\pi g}{\pi_j}$$

und zusammen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} f(X_m)}{\sum_{m=0}^{n} g(X_m)} = \frac{\pi f}{\pi g}.$$

Setze nun $f = f^+ - f^-$ mit

$$f^+(i) = \max\{f(i), 0\} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad f^-(i) = \max\{-f(i), 0\} \geq 0$$

und entsprechend $g^+, g^- \geq 0$ mit $g = g^+ - g^-$. Für f^+, f^-, g^+, g^- gilt (21.18) und es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^n f(X_m)}{\sum_{m=0}^n g(X_m)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ell(n)}\sum_{m=0}^n f^+(X_m) - \frac{1}{\ell(n)}\sum_{m=0}^n f^-(X_m)}{\frac{1}{\ell(n)}\sum_{m=0}^n g^+(X_m) - \frac{1}{\ell(n)}\sum_{m=0}^n g^-(X_m)} \\ &= \frac{\frac{\pi f^+}{\pi_j} - \frac{\pi f^-}{\pi_j}}{\frac{\pi g^+}{\pi_j} - \frac{\pi g^-}{\pi_j}} = \frac{\pi f^+ - \pi f^-}{\pi g^+ - \pi g^-} = \frac{\pi f}{\pi g}.\end{aligned}$$

■

Folgerung:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und positiv rekurrente Markovkette mit stationärer Verteilung π sowie $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\pi|f| < \infty$. Dann gilt unabhängig vom Anfangszustand P–f.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \pi f.$$

Beweis:
Setze in Satz 21.54 $g(i) = 1$ für alle $i \in E$. ■

21.55 Satz (2. Ergodensatz):
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und positiv rekurrente Markovkette mit stationärer Verteilung π. $f, g : E \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\pi|f| < \infty$ und $\pi|g| < \infty$ sowie $\pi f \neq 0$ oder $\pi g \neq 0$, ferner sei $T = T_1^{(j)}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{m=0}^n f(X_m) \middle| X_0 = i\right]}{E\left[\sum_{m=0}^n g(X_m) \middle| X_0 = i\right]} = \frac{E\left[\sum_{m=0}^{T-1} f(X_m) \middle| X_0 = j\right]}{E\left[\sum_{m=0}^{T-1} g(X_m) \middle| X_0 = j\right]} = \frac{\pi f}{\pi g}.$$

Beweis:
Der zweite Teil der Gleichungskette folgt unmittelbar aus Satz 21.53. Die erste Identität wird wie Satz 21.54 gezeigt; also zerlege

$$E\left[\sum_{m=0}^n f(X_m)\right] = E\left[\sum_{m=0}^{T_1^{(j)}-1} f(X_m)\right] + \sum_{k=1}^{\ell(n)-1} E[Y_k] + E\left[\sum_{m=T_{\ell(n)}^{(j)}}^n f(X_m)\right]$$

und folgere zunächst wieder für $f \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\ell(n)-1} E[Y_k] \leq E\left[\sum_{m=0}^n f(X_m)\right] \leq E\left[\sum_{m=0}^{T_1^{(j)}-1} f(X_m)\right] + \sum_{k=1}^{\ell(n)} E[Y_k].$$

Der erste Summand auf der rechten Seite hängt wieder nicht von n ab, und es folgt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ell(n)} E\left[\sum_{m=0}^n f(X_m)\right] = E[Y_1] = \frac{\pi f}{\pi_j}$$

und das entsprechende Ergebnis für g. Somit ist der Satz für $f, g \geq 0$ bewiesen und die allgemeine Aussage folgt wie im Beweis von Satz 21.54 durch Zerlegung in Positiv– und Negativteil. ■

In Verallgemeinerung von Satz 21.51 gilt nun

21.56 Satz:
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible und positiv rekurrente Markovkette mit stationärer Verteilung π sowie $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\pi|f| < \infty$. Dann gilt unabhängig vom Anfangszustand

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(X_m)\middle| X_0 = i\right] = \pi f.$$

Beweis:
Setze in Satz 21.55 $g(i) = 1$ für alle $i \in E$. ■

Literatur zu Kapitel 21

Folgende Bücher werden als begleitende Literatur zu diesem Kapitel des Skriptes empfohlen:

- S. I. Resnick:
  Adventures in Stochastic Processes,
  Birkhäuser, Boston, 1992.
  ISBN:0817635912
- K.L. Chung:
  Markov Chains with stationary transition probabilities,
  Springer–Verlag, 1960.
- S. Karlin/H.M. Taylor:
  A first course in stochastic processes,
  Academic Press, 1975.
- S. P. Meyn, R. L. Tweedie:
  Markov Chains and Stochastic Stability,
  Springer-Verlag, London, 1993.
  ISBN: 3540198326
- E. Cinlar:
  Introduction to stochastic processes,
  Prentice–Hall, 1975.

Kapitel 22

Markovketten mit stetiger Zeit

In diesem Kapitel werden Markovketten in stetiger Zeit (oder auch Markovprozesse) behandelt. Zunächst werden die wesentlichen Begrifflichkeiten über Markovketten in diskreter Zeit auf solche in stetiger Zeit übertragen. Ein Schwerpunkt ist die Konstruktion von Übergangsfunktionen aus sogenannten Q–Matrizen. Abschließend wird das Grenzverhalten von Markovprozessen untersucht.

Schlüsselwörter: Homogener Markovprozess, Markoveigenschaft, Übergangsfunktion, Q–Matrix, Kolmogorovsche Rückwärts– und Vorwärtsgleichungen, Q–Prozess, Feller–Prozess, Regularität, Irreduzibilität, Rekurrenz, Transienz, Grenzverteilung, Ergodensätze.

22.1 Einführung

22.1 Definition (elementare Markov–Eigenschaft, Markovprozesse):
Ein stochastischer Prozess $(\Omega, \mathfrak{A}, P, (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$ mit dem Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$ heißt Markovprozess, wenn für jede Menge $B \in \mathfrak{B}$ und für jedes Paar $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ von Zeitpunkten mit $s < t$ fast–sicher gilt:

$$P(X_t \in B \mid \sigma\{X_u; u \leq s\}) = P(X_t \in B \mid X_s),$$

d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zukünftigen Zustände X_t mit $t > s$ hängt nur vom aktuellen Zustand X_s, nicht aber von den vergangenenen Zuständen X_u mit $u < s$ ab. In Analogie zu Markovketten spricht man von der elementaren Markov–Eigenschaft und nennt die Markovprozesse auch Prozesse ohne Gedächtnis.

22.2 Bemerkung:
Wir beschäftigen uns hier ausschließlich mit Markovschen Prozessen mit abzählbarem Zustandsraum E. In diesem Fall kann man $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(E)$ wählen.

22.3 Definition (Homogene Markovprozesse):
Ein Markovprozess heißt homogen, wenn die Größen $P(X_t = j \mid X_s = i)$ nur von der Differenz $t - s$ abhängen. In diesem Fall hat man

$$P_{ij}(t) := P(X_t = j \mid X_0 = i) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$$

für alle $s \in \mathbb{R}^+$. $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in E}$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit, –matrix, –funktion oder Markov-Kern.

Für die absoluten Zustandswahrscheinlichkeiten $P_i(t)$ mit $i \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$ eines homogenen Markovprozesses mit abzählbarem Zustandsraum gilt:

$$P_i(t) := P(X_t = i) = \sum_{k \in E} P(X_t = i \mid X_0 = k) \cdot P(X_0 = k) = \sum_{k \in E} P_{ki}(t) \cdot P(X_0 = k).$$

Die endlichdimensionalen Verteilungen berechnen sich wie folgt: $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ bezeichnen Zeitpunkte und $j_0, j_1, \ldots, j_n$ Zustände aus E. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(X_{t_n} = j_n, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = j_0) &= P(X_{t_n} = j_n \mid X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = j_0) \\
&\quad \cdot P(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \mid X_{t_{n-2}} = j_{n-2}, \ldots, X_{t_0} = j_0) \cdot \ldots \cdot P(X_{t_1} = j_1 \mid X_{t_0} = j_0) \cdot P(X_{t_0} = j_0) \\
&= P(X_{t_n} = j_n \mid X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) \cdot P(X_{t_{n-1}} = j_{n-1} \mid X_{t_{n-2}} = j_{n-2}) \cdot \ldots \\
&\quad \cdot P(X_{t_1} = j_1 \mid X_{t_0} = j_0) \cdot P(X_{t_0} = j_0) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} P_{j_k j_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \right) P(X_{t_0} = j_0).
\end{aligned}$$

22.4 Satz (Eigenschaften der Übergangsmatrix $P(t)$):
Die Übergangswahrscheinlichkeit $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, eines homogenen Markovprozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ mit abzählbarem Zustandsraum E besitzt folgende Eigenschaften:

a) *$P_{ij}(t) \geq 0$ für alle $i, j \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sowie $P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j, \\ 0\,, & i \neq j. \end{cases}$*

b) *$\sum\limits_{j\in E} P_{ij}(t) \leq 1$ für alle $i \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$.*

c) *Es gilt die Gleichung von Chapman–Kolmogorov:*

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s) \qquad \forall i, j \in E \text{ und } s, t \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis:

a) Klar.

b) Es ist $\sum\limits_{j\in E} P_{ij}(t) = P(j \in E | X_0 = i) \leq 1$.

c) Wegen der Homogenität des Markovprozesses wird

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+s) = P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) &= \sum_{k\in E} P(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in E} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) \cdot P(X_t = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in E} P(X_{t+s} = j \mid X_t = k) \cdot P(X_t = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s) \qquad \forall i, j \in E \text{ und } s, t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$ ■

22.5 Bemerkung:
Ein Markovprozess legt die Übergangsmatrix eindeutig fest. Ist umgekehrt eine Matrixfunktion $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, mit den Eigenschaften aus Satz 22.4 gegeben, dann lassen sich ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein homogener Markovprozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ über E so konstruieren, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ die durch $P_{ij}(t)$ definierten Übergangswahrscheinlichkeiten besitzt. Dies motiviert auch die nachstehende Definition.

22.6 Definition (Übergangsfunktion):
Es sei E eine abzählbare Menge (E heißt Zustandsraum).
Eine Matrixfunktion $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}, t \geq 0$, heißt Übergangsfunktion, wenn sie alle drei Eigenschaften aus Satz 22.4 besitzt.
Man spricht von einer Standard–Übergangsfunktion, wenn sie zusätzlich (rechtsseitig) stetig in 0 ist, d.h. wenn

$$\lim_{t\to 0+} P_{ij}(t) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in E$$

gilt.

22.7 Bemerkung:

a) Für die Stetigkeit der Übergangsfunktion in der 0 reicht die Forderung

$$\lim_{t \to 0+} P_{ii}(t) = 1 \qquad \forall i \in E.$$

Aufgrund der Ungleichung $0 \leq \sum\limits_{j \in E, j \neq i} P_{ij}(t) \leq 1 - P_{ii}(t)$ gilt dann auch schon

$$\lim_{t \to 0+} P_{ij}(t) = 0$$

für $i \neq j$.

b) Die rechtsseitige Stetigkeit in der 0 ist eine sehr starke Eigenschaft. Wir werden später zeigen, dass damit bereits die rechtsseitige Differenzierbarkeit in 0 sowie die Differenzierbarkeit (und damit erst recht die Stetigkeit) für jeden Zeitpunkt $t > 0$ folgt.

22.8 Definition:

Eine Übergangsmatrix $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in E}$ heißt <u>stochastisch</u>, falls

$$\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1 \qquad \forall i \in E$$

gilt. Ist mindestens eine Zeilensumme < 1, so heißt $P(t)$ <u>substochastisch</u>. Im Vorgriff auf Satz 22.10 sei hier bereits angemerkt, dass $P(t)$ stochastisch für alle $t > 0$ ist, wenn $P(t)$ für ein $t > 0$ stochastisch ist.

Im Fall einer substochastischen Matrix gibt es einen Zustand $i \in E$, von dem aus der Markovprozess den zulässigen Zustandsraum E mit einer positiven Wahrscheinlichkeit $1 - \sum_{j \in E} P_{ij}(t)$ verlässt. In einigen Fällen ist es allerdings einfacher, mit einer stochastischen Übergangsfunktion zu arbeiten. Dabei ist der nachstehende Satz hilfreich.

22.9 Satz:

Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in E}$ eine substochastische Übergangsfunktion über E. Sei Δ ein zusätzlicher Zustand, der nicht in E liegt. Definiere $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ und

$$P^\Delta_{ij}(t) := \begin{cases} P_{ij}(t) & , \quad i, j \in E \\ 1 - \sum_{k \in E} P_{ik}(t) & , \quad i \in E, j = \Delta \\ 0 & , \quad i = \Delta, j \in E \\ 1 & , \quad i = j = \Delta. \end{cases}$$

Dann ist $P^\Delta_{ij}(t)$ eine stochastische Übergangsfunktin über E_Δ. Ist $P(t)$ eine Standard–Übergangsfunktion, so auch $P^\Delta(t)$.

Beweis:

Die Eigenschaften $P^\Delta_{ij}(t) \geq 0$, $P^\Delta_{ij}(0) = \delta_{ij}$ sowie (im Fall einer Standard–Übergangsfunktion) $\lim\limits_{t \to 0} P^\Delta_{ij}(t) = \delta_{ij}$ sind klar, auch

$$\sum_{j \in E_\Delta} P^\Delta_{ij}(t) = 1$$

folgt unmittelbar aus der Definition von P^Δ. Damit bleibt die Gleichung von Chapman–Kolmogorov nachzuweisen:

1. Seien $i, j \in E$, dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k \in E_\Delta} P_{ik}^\Delta(t) P_{kj}^\Delta(s) &= \sum_{k \in E} P_{ik}(t) P_{kj}(s) + P_{i\Delta}(t) P_{\Delta j}(s) = P_{ij}(t+s) + P_{i\Delta}(t) \cdot 0 \\ &= P_{ij}(t+s) = P_{ij}^\Delta(t+s).\end{aligned}$$

2. Sei $i \in E$ und $j = \Delta$ der Zielpunkt, dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{k \in E_\Delta} P_{ik}^\Delta(t) P_{kj}^\Delta(s) &= \sum_{k \in E} P_{ik}(t) P_{k\Delta}^\Delta(s) + P_{i\Delta}^\Delta(t) P_{\Delta\Delta}^\Delta(s) \\ &= \sum_{k \in E} P_{ik}(t) \cdot \Big(1 - \sum_{l \in E} P_{kl}(s)\Big) + \Big(1 - \sum_{k \in E} P_{ik}(t)\Big) \cdot 1 \\ &= \sum_{k \in E} P_{ik}(t) + \Big(1 - \sum_{k \in E} P_{ik}(t))\Big) - \sum_{k \in E} \sum_{l \in E} P_{ik}(t) P_{kl}(s) \\ &= 1 - \sum_{k \in E} \sum_{l \in E} P_{ik}(t) P_{kl}(s) = 1 - \sum_{l \in E} \sum_{k \in E} P_{ik}(t) P_{kl}(s) \\ &= 1 - \sum_{l \in E} P_{il}(t+s) \quad \text{(Gleichung von Chapman–Kolmogorov)} \\ &= P_{i\Delta}^\Delta(t+s). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

3. Sei $i = \Delta$ der Startpunkt (letzte Zeile in der Matrix) und $j \in E$, dann ergibt sich

$$\sum_{k \in E_\Delta} P_{ik}^\Delta(t) P_{kj}^\Delta(s) = P_{\Delta\Delta}^\Delta(t) P_{\Delta j}^\Delta(s) = 1 \cdot 0 = 0 = P_{\Delta j}^\Delta(t+s).$$

4. Sei $i = j = \Delta$, dann ist

$$\sum_{k \in E_\Delta} P_{\Delta k}^\Delta(t) P_{k\Delta}^\Delta(s) = P_{\Delta\Delta}^\Delta(t) P_{\Delta\Delta}^\Delta(s) = 1 \cdot 1 = P_{\Delta\Delta}^\Delta(t+s).$$

Es sollen nun noch weitere Eigenschaften der Übergangsfunktion angegeben werden.

22.10 Satz:
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in E}$, $t \geq 0$, eine Übergangsfunktion.

a) $\sum_{j \in E} P_{ij}(t)$ *ist eine nichtwachsende Funktion von t für alle $i \in E$.*

b) Ist $P(t)$ stochastisch für eine bestimmtes $t > 0$, dann ist $P(t)$ stochastisch für alle $t > 0$.

Beweis:
a) Für $t, s \geq 0$ ist

$$\sum_{j \in E} P_{ij}(t+s) = \sum_{j \in E} \sum_{k \in E} P_{ik}(t) P_{kj}(s) = \sum_{k \in E} P_{ik} \underbrace{\sum_{j \in E} P_{kj}(s)}_{\leq 1} \leq \sum_{k \in E} P_{ik}(t).$$

b) Wir zeigen zunächst, dass $P(s+t)$ stochastisch ist, falls $P(t)$ und $P(s)$ stochastisch sind. Denn in diesem Fall gilt nach der Gleichung von Chapman–Kolmogorov

$$\sum_{j\in E} P_{ij}(s+t) = \sum_{j\in E}\sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kj}(t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(s)\sum_{j\in E} P_{kj}(t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(s) = 1.$$

Insbesondere folgt sofort durch Induktion, dass für jede natürliche Zahl m mit $P(s)$ auch $P(m\cdot s)$ stochastich ist.
Wir kommen nun zur ursprünglichen Behauptung zurück. Ist $P(t)$ stochastisch für ein $t>0$, so folgt aus dem ersten Teil, dass $P(s)$ stochastisch für alle $s\le t$ ist. Für $s>t$ wähle man n so, dass $\frac{s}{n}<t$ ist. Dann ist $P\left(\frac{s}{n}\right)$ stochastisch und nach der Vorüberlegung auch $P(s)$. ■

22.11 Satz (Eigenschaften der Übergangsfunktion):
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t\ge 0$, eine Standard-Übergangsfunktion.

a) $P_{ii}(t) > 0$ für alle $t\in\mathbb{R}^+$ und $i\in E$. Für $i,j\in E$ mit $i\ne j$ gilt:
Ist $P_{ij}(t)>0$ für ein $t>0$, dann ist $P_{ij}(s)>0$ für alle $s\ge t$.

b) Ist $P_{ii}(t)=1$ für ein $t>0$, dann gilt:
$P_{ii}(t)=1$ für alle $t\in\mathbb{R}^+$.

c) Für $t\ge 0$ gilt:

$$|P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t)| \le 1 - P_{ii}(|\varepsilon|)$$

d.h. $P_{ij}(t)$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

a) Sei $t>0$ beliebig. Da $P_{ij}(t)$ standard ist, existiert ein n derart, dass $P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)>0$ ist. Aus der Gleichung von Chapman–Kolmogorov folgt

$$\begin{aligned} P_{ii}(t) &= \sum_{j\in E} P_{ij}\left(\frac{t}{n}\right) P_{jk}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) \ge P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right) P_{ii}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) \\ &\ge \left(P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^2 P_{ii}\left(\frac{(n-2)t}{n}\right) \ge \ldots \ge \left(P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n > 0. \end{aligned}$$

Sei nun $P_{ij}(t)>0$ für ein $t>0$, so folgt wieder mit der Gleichung von Chapman–Kolmogorov

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s) \ge P_{ij}(t)P_{jj}(s) > 0,$$

da $P_{jj}(s)>0$ für alle $s>0$ bereits bewiesen ist.

b) Sei $t>0$ so gewählt, dass $P_{ii}(t)=1$ ist. Wir betrachten die Fälle $s<t$ und $s>t$ getrennt von einander.

(1) <u>$s < t$:</u>
Aus
$$P_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(s) P_{kj}(t-s) \geq P_{ij}(s) P_{jj}(t-s)$$
folgt
$$0 = 1 - P_{ii}(t) \geq \sum_{j \in E, j \neq i} P_{ij}(t) \geq \sum_{j \in E, j \neq i} P_{ij}(s) P_{jj}(t-s) \geq 0.$$
Da $P_{jj}(t-s) > 0$ ist, folgt notwendigerweise $P_{ij}(s) = 0$ für alle $j \neq i$.
Andererseits aber gilt:
$$1 \geq \sum_{j \in E} P_{ij}(s) \geq \sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1,$$
woraus $P_{ii}(s) = 1$ folgt.

(2) <u>$s > t$:</u>
Wir wählen ein n so, dass $\frac{s}{n} < t$ ist. Dann gilt wieder:
$$P_{ii}(s) \geq \left[P_{ii}\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n = 1.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Mit Hilfe der Gleichung von Chapman–Kolmogorov schließen wir:
$$\begin{aligned} P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t) &= \sum_{k \in E} P_{ik}(\varepsilon) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \in E, k \neq i} P_{ik}(\varepsilon) P_{kj}(t) - \underbrace{P_{ij}(t)[1 - P_{ii}(\varepsilon)]}_{\geq 0}. \end{aligned} \tag{22.1}$$

Um eine Abschätzung für $P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t)$ zu erhalten, betrachten wir die Ungleichung
$$[1 - P_{ii}(\varepsilon)] \geq P_{ij}(t)[1 - P_{ii}(\varepsilon)],$$
aus der
$$\begin{aligned} -[1 - P_{ii}(\varepsilon)] \leq -P_{ij}(t)[1 - P_{ii}(\varepsilon)] &\overset{(22.1)}{\leq} P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t) \\ &\overset{(22.1)}{\leq} \sum_{k \in E, k \neq i} P_{ik}(\varepsilon) \underbrace{P_{kj}(t)}_{\leq 1} \leq \sum_{k \in E, k \neq i} P_{ik}(\varepsilon) \\ &\leq 1 - P_{ii}(\varepsilon), \end{aligned}$$
■

also
$$|P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t)| \leq 1 - P_{ii}(\varepsilon)$$
folgt. Der Fall $\varepsilon < 0$ kann auf den bereits bewiesenen Fall $\varepsilon > 0$ zurückgeführt werden. Es ist
$$|P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t)| = |P_{ij}((t+\varepsilon) + (-\varepsilon)) - P_{ij}(t+\varepsilon))| \leq 1 - P_{ii}(-\varepsilon).$$
Folglich gilt für beliebiges ε
$$|P_{ij}(t+\varepsilon) - P_{ij}(t)| \leq 1 - P_{ii}(|\varepsilon|).$$

22.2 Q–Matrix und Kolmogorovsche Gleichungen

Von nun an seien alle Übergangsfunktionen standard. Wie bereits vorne angemerkt wurde, zieht diese Eigenschaft die Differenzierbarkeit der Übergangsfunktion auf $\mathbb{R}^+$ nach sich. Wir beginnen mit einem Hilfssatz über subadditive Funktionen.

22.12 Satz:
Es sei $\Phi : t \longrightarrow \Phi(t)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(s+t) \leq \Phi(s) + \Phi(t) \qquad \forall s, t > 0$ *(Subadditivität)*
2. $\lim\limits_{t\to 0} \Phi(t) = 0$.

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t} = q \qquad (\textit{möglicherweise ist } q = \infty)$$

und es gilt

$$q = \sup_{t>0} \frac{\Phi(t)}{t}.$$

Beweis:
Definiere

$$q = \sup_{t>0} \frac{\Phi(t)}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} \leq q$$

Wir zeigen: $\liminf_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} \geq q$. Wähle q' mit $q' < q$ und s mit $\frac{\Phi(s)}{s} \geq q'$.
Für jedes $t > 0$ können wir schreiben: $s = nt + h$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq h < t$ ist. Aufgrund der Subadditivität von Φ gilt

$$\Phi(s) = \Phi(nt+h) \leq \Phi(nt) + \Phi(h) \leq \ldots \leq n \cdot \Phi(t) + \Phi(h). \tag{22.2}$$

Also

$$q' \leq \frac{\Phi(s)}{s} \overset{(22.2)}{\leq} \frac{n\Phi(t) + \Phi(h)}{s} = \frac{n \cdot t}{s} \cdot \frac{\Phi(t)}{t} + \frac{\Phi(h)}{s}.$$

Die Beziehung $s = nt + h$ impliziert

$$\frac{nt}{s} \longrightarrow 1; \quad h \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to 0 \text{ und } s \text{ fest.}$$

Nach Voraussetzung strebt mit h auch $\Phi(h)$ gegen 0. Deshalb gilt

$$q' \leq \liminf_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t}.$$

Da dies für alle $q' < q$ gilt, folgt die Behauptung. ∎

22.13 Satz:
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, eine Standardübergangsfunktion. Dann gilt für alle $i \in E$:

a) $q_i = -q_{ii} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{[1 - P_{ii}(t)]}{t} \in \overline{\mathbb{R}^+}$ *existiert,*
d.h. $P_{ii}(t)$ *ist differenzierbar an der Stelle* $t = 0$ *mit* $P'_{ii}(0) = q_{ii} = -q_i$.

b) $q_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P_{ii}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0.$

c) $P_{ii}(t) \geq e^{-q_i t} \geq 1 - q_i t \quad \forall t \geq 0.$

Beweis:

a) Definiere $\Phi(t) := -\log P_{ii}(t)$. Da $P_{ii}(t) \xrightarrow{t\to 0} 1$ und aufgrund von Satz (22.11a) $P_{ii}(t) > 0$ für alle t, ist $\Phi(t)$ wohldefiniert und endlich für alle $t \geq 0$. Aus

$$\begin{aligned} P_{ii}(s+t) \geq P_{ii}(s)\cdot P_{ii}(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \log P_{ii}(s+t) \geq \log(P_{ii}(s)P_{ii}(t)) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\log P_{ii}(s+t) \leq -\log(P_{ii}(s)) - \log(P_{ii}(t)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi(s+t) \leq \Phi(s) + \Phi(s) \end{aligned}$$

folgt außerdem, dass $\Phi(t) = -\log P_{ii}(t)$ die Voraussetzungen von Satz 22.12 erfüllt. Deshalb existiert

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = q_i \geq 0.$$

Es muss nun noch $q_i = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{1-P_{ii}(t)}{t}$ gezeigt werden. Der Fall $q_i = 0$ wird dabei auf den Beweis von b) verschoben. Im Fall $q_i > 0$ ist

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} &= \lim_{t\to 0+} \frac{1 - e^{-\Phi(t)}}{\Phi(t)} \cdot \frac{\Phi(t)}{t} \\ &\quad \text{(da } \Phi(t) > 0 \text{ wegen } q_i = -q_{ii} > 0 \text{ für alle } t \text{ mit } 0 < t < \delta) \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{1 - e^{-\Phi(t)}}{\Phi(t)} \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{1 - [1 - \frac{\Phi(t)}{1!} + \frac{(\Phi(t))^2}{2!} - \frac{(\Phi(t))^3}{3!} + \ldots]}{\Phi(t)} \cdot \lim_{t\to 0+} \frac{\Phi(t)}{t} \\ &= 1 \cdot q_i = q_i. \end{aligned}$$

b) Ist $q_i = 0$, so gilt nach Satz 22.12 auch $\sup\limits_{t>0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$ und damit $-\frac{\log P_{ii}(t)}{t} = 0$ bzw. $P_{ii}(t) = 1$ für alle $t > 0$. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} = 0 = q_i$, was den Beweis von a) komplettiert.
Ist umgekehrt $P_{ii}(t) = 1$ für alle $t > 0$, so folgt sofort

$$q_i = \lim_{t\to 0+} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = 0.$$

c) Wegen $q_i = \sup \frac{\Phi(t)}{t}$ gilt für alle $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(t)}{t} \leq q_i &\Longrightarrow -log P_{ii}(t) \leq q_i t \\ &\Longrightarrow P_{ii}(t) \geq e^{-q_i t}\end{aligned}$$

Die Ungleichung $e^{-q_i t} \geq 1 - q_i t$ für alle $t > 0$ ist eine Standardabschätzung aus der Analysis. ■

22.14 Satz:
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in E}$, $t \geq 0$, eine Standardübergangsfunktion. Dann existieren für alle $i, j \in E$ mit $i \neq j$ die Grenzwerte $q_{ij} := \lim\limits_{t \to 0+} \frac{P_{ij}(t)}{t}$ und es gilt $0 \leq q_{ij} < \infty$.

Beweis (nach Chung, S. 132-133):
Betrachtet man für ein $h > 0$ den Ausschnitt $X^h = (X_{nh})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eines homogenen Markovprozesses, so stellt man fest, dass X^h eine eingebettete homogene Markovkette (mit diskreter Zeit) darstellt. Offensichtlich gilt für ihre n–Schritt–Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P_{ij}^{(n)}(h) = P_{ij}(nh) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir definieren weiter:

$${}_jP_{ii}^{(0)}(h) = 1; \quad {}_jP_{ii}^{(n)}(h) = P(X_{nh} = i, X_{\nu h} \neq j, 1 \leq \nu \leq n \mid X_0 = i).$$

Diese Wahrscheinlichkeiten werden als sogenannte Taboo-Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Sie geben die Wahrscheinlichkeit an, dass die Kette in genau n Schritten von i nach i zurückkommt, ohne zwischendurch den Zustand j besucht zu haben. Die Wahrscheinlichkeiten für einen erstmaligen Übergang von i nach j in n Schritten ist

$$f_{ij}^{(n)}(h) = P(X_{nh} = j, X_{\nu h} \neq j, 1 \leq \nu \leq n \mid X_0 = i).$$

Es gilt

$$P_{ij}(nh) \geq \sum_{\nu=0}^{n-1} {}_jP_{ii}^{(\nu)}(h) \cdot P_{ij}(h) \cdot P_{jj}((n - \nu - 1)h), \tag{22.3}$$

wobei die rechte Seite die Summe von Wahrscheinlichkeiten irgendwelcher Pfade von i nach j in n Schritten ist. Da jeder Zeitpunkt der eingebetteten Kette X^h Regenerationspunkt ist, gilt außerdem

$$P_{ii}(\nu h) \leq {}_jP_{ii}^{(\nu)}(h) + \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}^{(m)}(h) \cdot P_{ji}((\nu - m)h). \tag{22.4}$$

(Auf der rechten Seite werden die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade von i nach i mit mindestens einem Besuch in j aufsummiert.) Da $\sum\limits_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}^{(m)}(h) \leq 1$ ist, folgt aus (22.4)

$$\begin{aligned}{}_jP_{ii}^{(\nu)}(h) &\geq P_{ii}(\nu h) - \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}^{(m)}(h) \cdot P_{ji}((\nu - m)h) \\ &\geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1 \leq m \leq \nu} P_{ji}((\nu - m)h).\end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass $P(t)$ standard ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein t_0 mit

$$\max_{0\le t\le t_0} P_{ji}(t) < \varepsilon, \quad \min_{0\le t\le t_0} P_{ii}(t) > 1-\varepsilon, \quad \min_{0\le t\le t_0} P_{jj}(t) > 1-\varepsilon.$$

Deshalb gilt für $nh < t_0$ und $\nu = 0, 1, \dots, n-1$

$${}_jP_{ii}^{(\nu)}(h) \ge P_{ii}(\nu h) - \max_{1\le m\le \nu} P_{ji}((\nu-m)h) > 1-\varepsilon-\varepsilon = 1-2\varepsilon.$$

Setzt man dieses Ergebnis in (22.3) ein, bekommt man

$$\begin{aligned} P_{ij}(nh) &\ge \sum_{\nu=0}^{n-1} {}_jP_{ii}^{(\nu)}(h) \cdot P_{ij}(h) \cdot P_{jj}((n-\nu-1)h) \\ &> (1-2\varepsilon) \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} P_{ij}(h) \cdot (1-\varepsilon) = (1-3\varepsilon+2\varepsilon^2) \cdot n \cdot P_{ij}(h) \\ &\ge (1-3\varepsilon) \cdot n \cdot P_{ij}(h) \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{P_{ij}(nh)}{nh} > (1-3\varepsilon)\frac{Pij(h)}{h} \quad \text{für } nh < t_0.$$

Wir definieren

$$q_{ij} := \limsup_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t}.$$

Indem man den Grenzübergang $h \to 0$ und $nh \to t$ durchführt, wobei $0 < t < t_0$ ist, erhält man

$$\frac{P_{ij}(t)}{t} \ge (1-3\varepsilon)q_{ij},$$

woraus $q_{ij} < \infty$ folgt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt andererseits

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{P_{ij}(t)}{t} \ge q_{ij},$$

woraus $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij}$ folgt. ∎

22.15 Definition:
Ein Zustand $i \in E$ heißt stabil, falls $q_i < \infty$, und instabil (bzw. flüchtig, englisch: instantaneous), falls $q_i = \infty$ ist. Eine Übergangsfunktion $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \ge 0$, wird stabil genannt, falls alle Zustände $i \in E$ stabil sind. Ein Zustand $i \in E$ heißt absorbierend, falls $q_i = 0$ bzw. falls $P_{ii}(t) = 1$ für alle $t \ge 0$ ist.

22.16 Satz:
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \ge 0$, eine Übergangsfunktion mit $P'(0) = Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$. Dann ist $\sum\limits_{j\in E} q_{ij} \le 0$ für alle $i \in E$.

Beweis:
Wegen $\sum_{j\in E} P_{ij}(t) \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{t\to 0+} \sum_{j\in E} \frac{P_{ij}(t)-1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{P_{ii}(t)-1}{t} + \lim_{t\to 0+} \sum_{j\in E, j\neq i} \frac{P_{ij}(t)}{t} \\ &\geq \lim_{t\to 0+} \frac{P_{ii}(t)-1}{t} + \sum_{j\in E, j\neq i} \lim_{t\to 0+} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ii} + \sum_{j\in E, j\neq i} q_{ij} = \sum_{j\in E} q_{ij}. \end{aligned}$$ ■

22.17 Definition (Begriff der Q–Matrix):
Eine Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$ über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Indexmenge E mit Elementen $q_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt Q–Matrix, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $0 \leq q_{ij} < \infty$ *für alle* $i, j \in E$ *mit* $i \neq j$.

(ii) $\sum_{j\in E, j\neq i} q_{ij} \leq q_i \leq \infty$ *für alle* $i \in E$*, wobei* $q_i := -q_{ii}$ *ist.*

Q heißt konservativ, falls $\sum_{j\in E} q_{ij} = 0$ *für alle* $i \in E$.

Anhand der Q–Matrix kann auch für Markovprozesse in stetiger Zeit (analog zu Definition 21.11) ein Markovgraph definiert werden.

22.18 Definition:
$(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein homogener Markovprozess mit abzählbarem Zustandsraum E und Q–Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$. Der bewertete gerichtete Graph $M = [J, K, \zeta]$ mit $J = E$, $K = \{(i,j) \in E \times E \mid q_{ij} \neq 0, i \neq j\}$ und $\zeta(i,j) = q_{ij}$ heißt Markovgraph des Prozesses.

Die Q–Matrix einer Übergangsfunktion ist durch einfache Differentation zu ermitteln. Die umgekehrte Aufgabenstellung besteht darin, aus einer gegebenen Q–Matrix Q sämtliche Übergangsfunktionen $P(t)$ mit $P'(0) = Q$ zu bestimmen und wird nach William Feller Feller'sches Konstruktionsproblem genannt. Da bei vielen Anwendungen nur die Q–Matrix bekannt ist, ist dieses Verfahren für die Praxis von besonderer Bedeutung.

22.19 Beispiel (M/M/1/m – Bediensystem):
Als Beispiel betrachten wir das Warteschlangensystem $M/M/1/m$, d.h. eine Warteschlange mit exponentiell (mit Parameter λ) verteilten Zwischenankunftszeiten, exponentiell (mit Parameter μ) verteilten Bedienzeiten, einem Bediener und einer maximalen Warteraumkapazität m. Mit X_t bezeichnen wir die Anzahl der Kunden im System zur Zeit t. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung stellt der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ der Anzahl der Kunden im System einen homogenen Markovprozess mit abzählbarem Zustandsraum $E = \{0, 1, \ldots, m\}$ dar.
Die Anzahl der im Intervall $(t + \Delta t]$ eintreffenden Kunden ist dann Poisson–verteilt mit dem Parameter λt (Stochastik II, Kapitel 17). Es folgt

$$\begin{aligned} P(\text{in } (t, t+\Delta t] \text{ treffen genau k Kunden ein}) &= e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\Delta t)^k}{k!} \\ &= \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{falls} \quad k = 0 \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{falls} \quad k = 1 \\ o(\Delta t) & \text{falls} \quad k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Sofern genügend Kunden im System sind, gilt entsprechend

$$P(\text{in } (t, t+\Delta t] \text{ werden genau k Kunden abgefertigt}) = \begin{cases} 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{falls} \quad k = 0 \\ \mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{falls} \quad k = 1 \\ o(\Delta t) & \text{falls} \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Für die zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten folgt:

$$\begin{aligned} P_{00}(\Delta t) &= 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ P_{ii}(\Delta t) &= 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t) \qquad (1 \leq i \leq m-1) \\ P_{mm}(\Delta t) &= 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t) \\ P_{i,i+1}(\Delta t) &= \lambda\Delta t + o(\Delta t) \qquad (0 \leq i \leq m-1) \\ P_{i,i-1}(\Delta t) &= \mu\Delta t + o(\Delta t) \qquad (1 \leq i \leq m). \end{aligned}$$

Die Q–Matrix lautet deshalb

$$\begin{aligned} q_{00} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -\lambda \\ q_{ii} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -(\lambda + \mu) \\ q_{mm} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{mm}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - \mu\Delta t + o(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -\mu \\ q_{i,i+1} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i,i+1}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda \\ q_{i,i-1} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{i,i-1}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mu\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = -\mu \end{aligned}$$

und hat folgende Gestalt

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i = 0 \\ i = 1 \\ i = 2 \\ \vdots \\ i = m-2 \\ i = m-1 \\ i = m \end{array}$$

Die Zeilensummen dieser Matrix verschwinden, d.h. die Matrix ist konservativ. Der zugehörige Markovgraph hat die Form

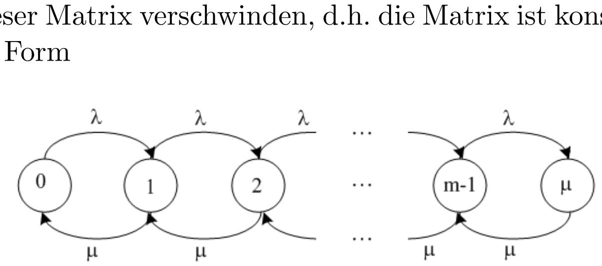


Abbildung 22.1: Markovgraph zum M/M/1/m-Bediensystem.

Bei der Berechnung von Übergangsfunktionen aus Q-Matrizen spielen die Kolmogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen eine wichtige Rolle. Ihre Herleitung erfordert einige vorbereitende Sätze.
Bislang wurde gezeigt, dass Standard–Übergangsfunktionen in 0 rechtsseitig differenzierbar sind. Es lässt sich aber auch die stetige Differenzierbarkeit in jedem $t > 0$ zeigen. Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der auf Doob und Chung zurückgeht, vgl. *K.L. Chung: Markov Chains with stationary transition probabilities (Springer–Verlag, 1960)* oder *J.L. Doob: Markoff chains – denumerable case (Trans. Amer. Math. Soc. 42, 107-140).*

22.20 Satz:
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, eine Übergangsfunktion über E.

a) *Sei $\{f(t)|t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ eine Familie von nichtnegativen Zeilenvektoren über E mit*
$$f(s) \cdot P(t) = f(s+t) \quad \forall s > 0, t \geq 0.$$
Dann sind alle Komponenten $f_i(t)$ von $f(t)$ stetig auf $(0,\infty)$ und haben endliche Grenzwerte für $t \to 0+$.

b) *Sei $\{g(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ eine Familie von stetigen, nichtnegativen Zeilenvektoren über E mit*
$$g(s+t) - g(t) = g(s) \cdot P(t) \quad \forall s > 0, t \geq 0.$$
Dann ist $g(t)$ differenzierbar auf $(0,\infty)$ und es gilt
$$g'(s+t) = g'(s) \cdot P(t) \quad \forall s > 0, t \geq 0.$$
Außerdem ist $g(t)$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$.

22.21 Satz:
Sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, eine Übergangsfunktion und $i \in E$ ein stabiler Zustand. Dann gilt:

a) *$q_{ij} = P'_{ij}(0)$ existiert und ist endlich für alle $j \in E$.*

b) *$P'_{ij}(t)$ existiert, ist endlich und stetig auf $\mathbb{R}^+$ für alle $j \in E$.*

c) *$P'_{ij}(s+t) = \sum\limits_{k\in E} P'_{ik}(s)P_{kj}(t)$ für alle $s > 0, t \geq 0$ und $j \in E$.*

Beweis:

a) klar.

b) Aufgrund von Satz 22.13(c) gilt zunächst
$$P_{ii}(t) \geq 1 - q_i \cdot t \quad \forall t \geq 0.$$
Für $0 \leq s < t$ können wir deshalb schreiben:
$$\begin{aligned} P_{ij}(t) - P_{ij}(s) &= \sum_{k\in E} P_{ik}(t-s)P_{kj}(s) - P_{ij}(s) \quad \text{(Gleichung von Chapman–Kolmogorov)} \\ &\geq P_{ii}(t-s)P_{ij}(s) - P_{ij}(s) = [P_{ii}(t-s) - 1]P_{ij}(s) \\ &\geq -q_i \cdot (t-s)P_{ij}(s). \end{aligned}$$

Sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$, dann gilt

$$P_{ij}(b) - P_{ij}(a) = \sum_{m=0}^{n-1} [P_{ij}(t_{m+1}) - P_{ij}(t_m)] \geq - \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} q_i P_{ij}(t_m)(t_{m+1} - t_m)}_{\text{untere Riemannsumme für } \int q_i P_{ij}(u)\, du}.$$

Da $P_{ij}(t)$ aufgrund von Satz 22.11(c) stetig ist, liefert der Übergang von der Riemannsumme zum Integral

$$P_{ij}(b) - P_{ij}(a) \geq - \int_a^b q_i P_{ij}(u)\, du. \tag{22.5}$$

Wir definieren Zeilenvektoren $g(t) = (g_j(t))_{j \in E}$ mit

$$g_j(t) = P_{ij}(t) - \delta_{ij} + \int_0^t q_i P_{ij}(u)\, du.$$

Der Ungleichung (22.5) entnimmt man wegen $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$, dass

$$g_j(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Da $P_{ij}(t)$ stetig ist, ist auch $g_j(t)$ stetig. Wir zeigen weiter, dass auch die Voraussetzungen von Satz 22.20(b) erfüllt sind. Denn es gilt

$$\begin{aligned} g_j(s+t) - g_j(t) &= P_{ij}(s+t) - P_{ij}(t) + \int_t^{s+t} q_i P_{ij}(u)\, du \\ &= \sum_{k \in E} P_{ik}(s) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) + \int_0^s q_i P_{ij}(z+t)\, dz \\ &= \sum_{k \in E} [P_{ik}(s) - \delta_{ik}] P_{kj}(t) + \sum_{k \in E} \left(\int_0^s q_i P_{ik}(z)\, dz \right) \cdot P_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in E} g_k(s) P_{kj}(t). \end{aligned}$$

Folglich ist $g(t)$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und der Grenzwert $\lim_{t \to 0+} g'(t)$ existiert und ist endlich. Wegen

$$P_{ij}(t) = g_j(t) + \delta_{ij} - \int_0^t q_i P_{ij}(u)\, du$$

folgt

$$P'_{ij}(t) = g'_j(t) - q_i P_{ij}(t), \tag{22.6}$$

und da die rechte Seite stetig auf $\mathbb{R}^+$ ist, gilt dies auch für $P'_{ij}(t)$. Außerdem gilt aufgrund von Satz 22.20(b) für alle $s > 0$ und $t \geq 0$

$$g'(s+t) = g'(s) P(t). \tag{22.7}$$

c) Wir greifen auf die Gleichung (22.6) zurück. Es folgt für $s > 0$ und $t \geq 0$

$$\begin{aligned} P'_{ij}(s+t) &= g'_j(s+t) - q_i P_{ij}(s+t) \overset{(22.7)}{=} \sum_{k\in E} g'_k(s)P_{kj}(t) - \sum_{k\in E} q_i P_{ik}(s)P_{kj}(t) \\ &= \sum_{k\in E}[g'_k(s) - q_i P_{ik}(s)]P_{kj}(t) \overset{(22.6)}{=} \sum_{k\in E} P'_{ik}(s)P_{kj}(t). \end{aligned}$$

■

22.22 Satz:
Es bezeichne $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, eine Übergangsfunktion und $j \in E$ sei ein stabiler Zustand. Dann gilt:

a) $q_{ij} = P'_{ij}(0)$ existiert und ist endlich für alle $i \in E$.

b) $P'_{ij}(t)$ existiert, ist endlich und stetig auf $\mathbb{R}^+$ für alle $i \in E$.

c) $P'_{ij}(s+t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P'_{kj}(t)$ für alle $s \geq 0, t > 0$ und $i \in E$.

Beweis:
Analog zu Satz 22.21. ■

Eine alternative Beweisführung für die Sätze 22.21 und 22.22 ohne Verwendung von Satz 22.20 erhalten wir unter der zusätzlichen Annahme, dass Q konservativ ist. Es gilt:

$$P_{ij}(s+t) - P_{ij}(t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) = \sum_{k\in E, k\neq i} P_{ik}(s)P_{kj}(t) + [P_{ii}(s) - 1]P_{ij}(t).$$

Zu zeigen ist, dass

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \sum_{k\in E, k\neq i} P_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

existiert. Mit Hilfe des Lemmas von Fatou schließen wir

$$\liminf_{s\to 0+} \frac{1}{s} \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kj}(t) \geq \sum_{k\in E} \liminf_{s\to 0+} \frac{P_{ik}(s)}{s} P_{kj}(t) = \sum_{k\in E} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Für alle $N > i$ gilt

$$\sum_{k\in E, k\neq i} P_{ik}(s)P_{kj}(t) \leq \sum_{k=1, k\neq i}^{N} P_{ik}(s)P_{kj}(t) + 1 - P_{ii}(s) - \sum_{k=1, k\neq i}^{N} P_{ik}(s),$$

da $P_{kj}(t) \leq 1$ und $\sum_{j\in E} P_{ij}(s) \leq 1$. Hieraus folgt

$$\limsup_{s\to 0+} \frac{1}{s} \sum_{k\in E, k\neq i} P_{ik}(s)P_{kj}(t) \leq \sum_{k=1, k\neq i}^{N} q_{ik}P_{kj}(t) + q_i - \sum_{k=1, k\neq i}^{N} q_{ik}.$$

Da Q konservativ ist, strebt der Ausdruck $q_i - \sum_{k=1, k\neq i}^{N} q_{ik}$ für $N \to \infty$ gegen 0. Daher wird

$$\lim_{s\to 0+} \frac{1}{s}[P_{ij}(s+t) - P_{ij}(t)] = P'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} q_{ik} P_{kj}(t) \qquad \text{(Rückwärtsgleichung)}. \tag{22.8}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} P'_{ij}(s+t) &= \sum_{k\in E} q_{ik} P_{kj}(s+t) \\ &\text{(Gleichung von Chapman–Kolmogorov)} \\ &\stackrel{\downarrow}{=} \sum_{k\in E}\sum_{l\in E} q_{ik} P_{kl}(s) P_{lj}(t) = \sum_{l\in E} P_{lj}(t) \sum_{k\in E} q_{ik} P_{kl}(s) \\ &\stackrel{(22.8)}{=} \sum_{l\in E} P'_{il}(s) P_{lj}(t). \end{aligned}$$

Analog (Teilen durch t und anschließender Grenzübergang) kann nun auch

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t) q_{kj} \tag{22.9}$$

gezeigt werden, woraus Satz 22.22 entsprechend folgt.
Man beachte, dass die Gleichungen (22.8) und (22.9) nicht für den allgemeinen Fall gezeigt wurden. Das Lemma von Fatou liefert für den Grenzübergang $s \to 0$ in Satz 22.21 bzw. $t \to 0$ in Satz 22.22 nur Ungleichungen. Der nachstehende Satz fasst diese Ergebnisse zusammen.

22.23 Satz:
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$, eine Übergangsmatrix und $i \in E$ ein stabiler Zustand.

*a) $P'_{ij}(t) \geq \sum_{k\in E} q_{ik} P_{kj}(t)$ für alle $t \geq 0$ und alle $j \in E$.
(sogenannte Kolmogorovsche Rückwärtsungleichungen)*

*b) $P'_{ij}(t) \geq \sum_{k\in E} P_{ik}(t) q_{kj}$ für alle $t \geq 0$ und alle $j \in E$.
(sogenannte Kolmogorovsche Vorwärtsungleichungen)*

*c) Im Fall einer konservativen Q–Matrix $Q = P'(0)$ gilt
$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} q_{ik} P_{kj}(t)$ für alle $t \geq 0$ und alle $j \in E$.
(sogenannte Kolmogorovsche Rückwärtsgleichungen)*

*d) Im Fall einer konservativen Q–Matrix $Q = P'(0)$ gilt
$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t) q_{kj}$ für alle $t \geq 0$ und alle $j \in E$.
(sogenannte Kolmogorovsche Vorwärtsgleichungen)*

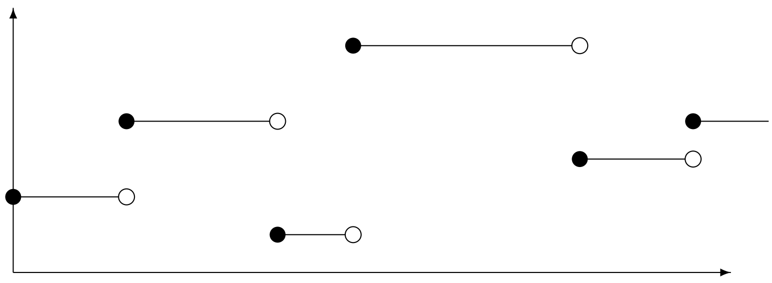


Abbildung 22.2: Pfadverhalten der eingebetteten Sprungkette eines Markovprozesses.

Die eingebettete Sprungkette

Die Werte q_{ij} werden häufig als Übergangsraten bezeichnet. Um diesen Begriff zu veranschaulichen, betrachten wir das Pfadverhalten der eingebetteten Sprungkette.

22.24 Definition:
Sei $i \in E$ und $X_0 = i$. Dann heißt

$$T_i := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 \mid X_t \neq i\} , & \textit{wenn das Infimum existiert} \\ \infty , & \textit{sonst} \end{cases}$$

Verweildauer im Zustand i.

22.25 Bemerkung:
Ist $i \in E$ ein absorbierender Zustand, d.h. $q_i = 0$, so gilt nach Satz 22.11(b) $P_{ii}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$. In diesem Fall ist $T_i = \infty$.

22.26 Satz:
Es sei $q_i \neq 0$.

a) Für alle $i \in E$ gilt

$$P(T_i > t \mid X_0 = i) = e^{-q_i t}, \qquad t \geq 0, \quad q_i := -q_{ii}.$$

b) Für die Übergangswahrscheinlichkeit von i nach $j \neq i$ am Ende der Verweilzeit T_i gilt

$$P(X_{T_i} = j \mid X_0 = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Beweis:

a) Für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
P(T_i > t+s \mid X_0 = i) &= P(X_u = i, 0 \leq u \leq t+s \mid X_0 = i) \\
&= P(X_u = i, t \leq u \leq t+s \mid X_u = i, X_0 = i, 0 \leq u \leq t) \\
&\quad \cdot P(X_u = i, 0 \leq u \leq t \mid X_0 = i) \\
&\text{(Markoveigenschaft)} \\
&\overset{\downarrow}{=} P(X_u = i, t \leq u \leq t+s \mid X_t = i) \cdot P(T_i > t \mid X_0 = i) \\
&\text{(Homogenität)} \\
&\overset{\downarrow}{=} P(X_u = i, 0 \leq u \leq s \mid X_0 = i) \cdot P(T_i > t \mid X_0 = i) \\
&= P(T_i > s \mid X_0 = i) \cdot P(T_i > t \mid X_0 = i).
\end{aligned}$$

Die Funktionalgleichung

$$g(s+t) = g(s) \cdot g(t)$$

besitzt genau eine beschränkte, rechtsseitig stetige Lösung, nämlich $g(t) = e^{-\alpha t}$; es ist also

$$P(T_i > t \mid X_0 = i) = e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Zur Bestimmung von α benutzen wir

$$\begin{aligned}
P(T_i > t \mid X_0 = i) &= P(X_u = i, 0 \leq u \leq t \mid X_0 = i) \\
&= \lim_{n \to \infty} P\left(X_u = i, u = 0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \ldots, \frac{(n-1)t}{n}, t \mid X_0 = i\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{t} \log[P(T_i > t \mid X_0 = i)] \quad \text{(Ausfallrate)} \\
&= -\frac{1}{t} \log\left\{\lim_{n \to \infty} \left[P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right\} = -\frac{1}{t} \log\left\{\lim_{n \to \infty} e^{n \cdot \log\left(P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right)}\right\} \\
&= -\lim_{n \to \infty} \frac{\log\left[P_{ii}\left(\frac{t}{n}\right)\right]}{\frac{t}{n}} = -\lim_{x \to 0+} \frac{\log[P_{ii}(x)]}{x} \\
&\text{(l'Hospital)} \\
&\overset{\downarrow}{=} -\lim_{x \to 0+} \left[\frac{P'_{ii}(x)}{P_{ii}(x)}\right] = -q_{ii} = q_i.
\end{aligned}$$

■

b) X_{T_i} ist der Zustand, in den der Markovprozess direkt von i aus übergeht. Nach Definition ist damit $P(X_{T_i} = i | X_0 = i) = 0$. Für $j \neq i$ ist

$$P\left(X_{T_i} = j \mid X_0 = i\right) = \lim_{h \to 0+} R_{ij}(h) \qquad \text{mit} \quad R_{ij}(h) = P(X_{t+h} = j \mid X_t = i, X_{t+h} \neq i).$$

Aufgrund der Homogenität des Markovprozesses ist $R_{ij}(h)$ unabhängig von t. Es gilt

$$R_{ij}(h) = P(X_h = j \mid X_0 = i, X_h \neq i) = \frac{P(X_h = j \mid X_0 = i)}{P(X_h \neq i \mid X_0 = i)} = \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)},$$

und daher
$$P\left(X_{T_i} = j \mid X_0 = i\right) = \lim_{h \to 0+} \frac{P_{ij}(h)}{h} \frac{h}{1 - P_{ii}(h)} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

22.27 Definition:
Es sei Q eine konservative Q–Matrix. Mithilfe der in Satz 22.26b) festgestellten Übergangswahrscheinlichkeiten lässt sich eine diskrete Markovkette definieren, nämlich

$$P_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} \ , & q_i = 0 \\ 0 \ , & q_i > 0, \ j = i \\ \frac{q_{ij}}{q_i} \ , & q_i > 0, \ j \neq i. \end{cases}$$

P_{ij} ist offensichtlich stochastisch und heißt eingebettete Sprungkette.

22.28 Bemerkung:
Ein durch die Übergangsfunktion $P_{ij}(t)$ repräsentierter Markovprozess lässt sich in eine Folge von exponentiell verweilten Verweildauern (vgl. Satz 22.26a)) und die eingebettete Sprungkette zerlegen. Auf den ersten Blick scheint es so, als würden diese beiden Komponenten, die nur von der Q–Matrix abhängen, schon zur vollständigen Beschreibung des Markovprozesses ausreichen. Jedoch ist diese Beschreibung im Allgemeinen nicht eindeutig – tatsächlich kann es mehrere Q–Prozesse, d.h. Übergangsfunktionen $P(t)$ mit $P'(0) = Q$ geben. Wie schon in Zusammenhang mit der Definition von Q–Matrizen erwähnt, ist die Suche nach den Q–Prozessen nicht einfach und wird die nächsten Kapitel beanspruchen.
Ein Grund für die Mehrdeutigkeit findet sich bei etwas genauerer Betrachtung der Folge der Verweildauern. Ein Prozess möge nacheinander die Zustände $1, 2, 3, \ldots$ mit den Verweilzeiten $T_1, T_2, T_3 \ldots$ durchlaufen. Definiert man nun $J_n = \sum_{k=0}^{n} T_k$ und ist $J_\infty := \lim_{n\to\infty} J_n = \infty$, so ist der Prozess zu jedem endlichen Zeitpunkt eindeutig festgelegt. Ist aber $J_\infty < \infty$, so fehlen Informationen über den Prozess zu den Zeitpunkten $t > J_\infty$. In diesem Fall bezeichnet man J_∞ auch als Explosionspunkt.

22.3 Q–Matrizen über endlichen Zustandsräumen

Wir setzen in diesem Abschnitt generell voraus, dass Q eine konservative Q–Matrix ist, und suchen alle Übergangsfunktionen $P(t)$ mit $P'(0) = Q$. Wir betrachten zunächst einen endlichen Zustandsraum $E = \{0, 1, \ldots, m\}$, und notieren die Kolmogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

$$P'(t) = P(t) \cdot Q \qquad \text{und} \qquad P'(t) = Q \cdot P(t)$$

mit der Anfangsbedingung $P(0) = I$. Wir wollen zeigen, dass in diesem Fall der Q–Prozess eindeutig bestimmt ist und einer vergleichsweise einfachen Darstellung genügt. Dazu setzen wir

$$e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} \qquad \textit{mit} \quad e^0 = I$$

und stellen fest:

22.29 Satz:

a) e^{tQ} *existiert und ist wohldefiniert für alle* $t \in \mathbb{R}^+$.

b) $P(t) = e^{tQ}$ *ist eine Lösung der Kolmogorovschen Vorwärts– und Rückwärtsgleichungen.*

c) $P(t) = e^{tQ}$ *ist die einzige Lösung der Kolmogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen.*

Beweis:

a) Schreibt man $P(t) = e^{tQ}$ komponentenweise auf, erhält man

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} + tq_{ij} + \frac{t^2}{2!}q_{ij}^{(2)} + \frac{t^3}{3!}q_{ij}^{(3)} + \dots,$$

wobei $Q^n = \left(q_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in E}$ sei. Wegen

$$|q_{ij}| \leq (m+1)\max|q_{ij}| = \|Q\|$$

und wegen $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ erhalten wir

$$\left|q_{ij}^{(n)}\right| \leq \|Q^n\| \leq \|Q\|^n \qquad \forall i,j \in E.$$

Folglich besitzt die Potenzreihe $P_{ij}(t)$ eine absolut–konvergente Majorante für alle reellen t, nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{t^n}{n!} = e^{qt}, \qquad q = \|Q\|.$$

Daher konvergiert auch $P_{ij}(t)$ absolut für alle reellen t. Da Aussagen über Matrizen elementweise verstanden werden sollen, haben wir nachgewiesen, dass

$$e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} \frac{t^n}{n!}\right)_{i,j\in E}$$

für alle reellen t absolut konvergiert.

b) Da man bei einer konvergenten Potenzreihe gliedweise differenzieren darf, erhält man für $P(t) = e^{tQ}$, $t \geq 0$:

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tQ)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^{n-1}Q^n}{n!}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\cdot Q^{n-1}\cdot Q}{(n-1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n \cdot Q^n}{n!}Q = e^{tQ}\cdot Q = P(t)\cdot Q \\[2ex] \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Q\cdot t^{n-1}\cdot Q^{n-1}}{(n-1)!} = Q \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot Q^n}{n!} = Q\cdot e^{tQ} = Q\cdot P(t) \end{cases}$$

Außerdem gilt $P(0) = e^{0Q} = I$.

c) Hierzu betrachten wir die Matrixfunktion

$$R(t) = P(t) \cdot e^{-tQ},$$

wobei $P(t)$ die Kolmogorovschen Vorwärtsgleichung erfüllen möge, d.h. $P'(t) = P(t) \cdot Q$, $P(0) = I$. Offensichtlich gilt

$$R'(t) = P'(t) \cdot e^{-tQ} + P(t) \cdot (-Q)e^{-tQ} = P(t) \cdot Qe^{-tQ} - P(t) \cdot Qe^{-tQ} = 0$$

und außerdem ist

$$R(0) = P(0) \cdot e^{-0Q} = I \cdot I = I.$$

Da die Ableitung von $R(t)$ gleich Null ist für alle t, sind alle Einträge von $R(t)$ unabhängig von t, d.h.

$$I = R(0) = R(t) = P(t) \cdot e^{-tQ} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Multiplikation von rechts mit e^{tQ} ergibt

$$e^{tQ} = P(t) \cdot e^{-tQ} e^{tQ} = P(t) \cdot e^{(-t+t)Q} = P(t) \cdot e^{0Q} = P(t) \cdot I = P(t),$$

d.h. jede Lösung der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichung ist von der Form $P(t) = e^{tQ}$. Entsprechend kann auch mit der Rückwärtsgleichung verfahren werden. ■

22.30 Satz:
Die Lösung $P(t) = e^{tQ}$ der Kolmogorovschen Gleichungen ist ein Q–Prozess.

Beweis:
Es sind die drei definierenden Eigenschaften von Übergangsfunktionen zu zeigen.

1. $P_{ij}(t) \geq 0$, $\forall i, j \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sowie $P(0) = I$. (trivial)
2. $\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1$ für alle $i \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Da Q konservativ ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\sum_{j \in E} P_{ij}(t)\right) &= \sum_{j \in E} \frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{j \in E} \sum_{k \in E} P_{ik}(t) \cdot q_{kj} \\ &= \sum_{k \in E} P_{ik}(t) \sum_{j \in E} q_{kj} = \sum_{k \in E} P_{ik}(t) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j \in E} P_{ij}(t)\right) = 0,$$

dass $\sum_{j \in E} P_{ij}(t)$ konstant für alle $t \in \mathbb{R}^+$ ist. Deshalb gilt

$$\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = \sum_{j \in E} P_{ij}(0) = \sum_{j \in E} \delta_{ij} = 1.$$

3. $P(t) = e^{tQ}$ erfüllt die Gleichung von Chapman und Kolmogorov. Mit $Q^0 := I$ gilt

$$\begin{aligned} P(t+s) &= e^{(t+s)Q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} Q^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{t^i s^j}{i!j!} \right) Q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{t^i}{i!} Q^i \cdot \frac{s^j}{j!} Q^j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} Q^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} Q^j \right) \\ &= e^{tQ} \cdot e^{sQ}. \end{aligned}$$ ■

Ein Spezialfall zur Berechnung von e^{tQ} erhält man unter der Annahme, dass Q eine $(m+1) \times (m+1)$–Matrix ist mit den Eigenwerten $\alpha_0, \dots, \alpha_m$. Mit $x_0, \dots, x_m$ bezeichnen wir die zugehörigen Eigenvektoren und setzen $B = [x_0, \dots, x_m]$. Dann gilt

$$B^{-1} Q B = D = \operatorname{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_m).$$

Hieraus folgt $(B^{-1}QB)^2 = B^{-1}Q^2B = D^2$ und allgemein

$$B^{-1} Q^n B = D^n \qquad \text{bzw.} \qquad Q^n = B D^n B^{-1}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} e^{tQ} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (B D^n B^{-1}) = B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n \right) B^{-1} \\ &= B \cdot \operatorname{diag}(e^{t\alpha_0}, e^{t\alpha_1}, \dots, e^{t\alpha_m}) B^{-1}. \end{aligned}$$

22.31 Beispiel:
Es sei

$$E = \{0,1\}, \quad Q = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix},$$

d.h. Q ist konservativ. Es gilt:

$$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 + \beta\delta & -\beta^2 - \beta\delta \\ -\beta\delta - \delta^2 & -\beta\delta + \delta^2 \end{pmatrix} = -(\beta+\delta) \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix} \\ &= -(\beta+\delta) Q. \end{aligned}$$

Allgemein folgt induktiv sofort $Q^n = (-1)^{n-1} (\beta+\delta)^{n-1} Q$. Damit wird

$$\begin{aligned} P(t) = e^{tQ} &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\beta+\delta)^{n-1} t^n Q}{n!} \\ &= I - \frac{1}{\beta+\delta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(\beta+\delta)t)^n}{n!} \right) Q = I - \frac{1}{\beta+\delta} \left(e^{-t(\beta+\delta)} - 1 \right) Q \\ &= \frac{1}{\beta+\delta} \begin{pmatrix} \delta + \beta e^{-(\beta+\delta)t} & \beta - \beta e^{-(\beta+\delta)t} \\ \delta - \delta e^{-(\beta+\delta)t} & \beta + \delta e^{-(\beta+\delta)t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Natürlich gilt auch hier wieder

$$P_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j\in E} P_{ij}(t) = 1, \quad P(0) = I.$$

22.32 Bemerkung:
Offensichtlich lassen sich die bisherigen Überlegungen auch auf den Fall übertragen, dass E abzählbar unendlich viele Zustände umfasst. Es muss lediglich sichergestellt sein, dass

$$\sup_{i,j\in E} |q_{ij}| < \infty$$

gilt, was wegen $q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij}$ äquivalent zu

$$\sup_{i\in E} |q_{ii}| < \infty.$$

ist. Dies ist jedoch bei praktischen Fragestellungen eine zu große Einschränkung, so dass andere Methoden zur Lösung des Fellerschen Konstruktionsproblems benötigt werden.

22.33 Beispiel (Poissonprozess):
Der Poissonprozess (oder auch reiner Geburtsprozess) ist ein homogener Markovprozess mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ und Q-Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$, wobei

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda \ , & j = i+1, \ i = 0,1,2,\dots, \\ -\lambda \ , & j = i, \ i = 0,1,2,\dots, \\ 0. \ , & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit hat die Q–Matrix die Gestalt

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & 0 \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$q_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{j-i}(-1)^{n+j-i}\lambda^n \ , & 0 \leq j-i \leq n, \\ 0 \ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt für $j \geq i$ und $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= \delta_{ij} + tq_{ij} + \frac{t^2}{2!}q_{ij}^{(2)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{j-i+k}}{(j-i+k)!} q_{ij}^{(j-i+k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{j-i+k}}{(j-i+k)!} \binom{j-i+k}{j-i} (-1)^k \lambda^{j-i+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{j-i+k}}{(j-i+k)!} \frac{(j-i+k)!}{(j-i)!k!} (-1)^k \lambda^{j-i+k} \\ &= \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^k}{k!} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Für $j < i$ gilt $P_{ij}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

22.4 Fellersches Konstruktionsproblem

In diesem Abschnitt soll nun eine Methode vorgestellt werden, die es ermöglicht, auch bei unbeschränkten Q–Matrizen einen zugehörigen Q–Prozess zu finden. Dabei setzen wir voraus, dass die Q–Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ konservativ ist, d.h. für alle $i \in E$ gilt $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$. Die Q–Prozesse erfüllen somit notwendigerweise die Kolmogorovsche Vorwärts– und Rückwärtsgleichung. Bei der Bestimmung eines solchen Prozesses hilft die Umformung der beiden Gleichungen in Integralgleichungen.

22.34 Satz:
Es gilt für alle $i, j \in E$:

a) $P'_{ij}(t) = \sum\limits_{k \in E} q_{ik} P_{kj}(t),\ t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum\limits_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int\limits_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} P_{kj}(s) ds,\ t \geq 0.$

b) $P'_{ij}(t) = \sum\limits_{k \in E} P_{ik}(t) q_{kj},\ t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q_j t} + \sum\limits_{\substack{k \in E \\ k \neq j}} \int\limits_0^t e^{-q_j(t-s)} P_{ik}(s) q_{kj} ds,\ t \geq 0.$

Beweis:
a) Wegen $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$ gilt

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t) e^{q_i t} &= \delta_{ij} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int\limits_0^t e^{q_i s} q_{ik} P_{kj}(s)\, ds \\
\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[P_{ij}(t) e^{q_i t}\Big] &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik} P_{kj}(t) e^{q_i t} \\
\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[P_{ij}(t)\Big] e^{q_i t} + q_i e^{q_i t} P_{ij}(t) &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik} P_{kj}(t) e^{q_i t} \\
\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[P_{ij}(t)\Big] e^{q_i t} &= \sum_{k \in E} q_{ik} P_{kj}(t) e^{q_i t} \\
\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[P_{ij}(t)\Big] &= \sum_{k \in E} q_{ik} P_{kj}(t).
\end{aligned}$$

b) Analog. ■

Die Idee besteht nun darin, eine der beiden Integralgleichungen als Iterationsgleichung zu verwenden und den entsprechenden Grenzwert näher zu betrachten (Lösung der sukzessiven Approximation). Dazu setzen wir für $i, j \in E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(0)}(t) &\equiv 0, \\
\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int\limits_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
f_{ij}(t) &= \lim_{n \to \infty} \sigma_{ij}^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

In den nachstehenden Sätzen wird nun gezeigt, dass $\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ tatsächlich ein wohldefinierter Q–Prozess ist und unter allen Q–Prozessen eine Minimalitätseigenschaft besitzt.

22.35 Satz:
$\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ *ist wohldefiniert und Lösung der Kolmogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen.*

Beweis:
Zum Beweis der Wohldefiniertheit muss die Konvergenz der Folge $\{\sigma_{ij}^{(n)}(t)\}$ für alle $i, j \in E$ nachgewiesen werden. Dazu zeigen wir, dass $\{\sigma_{ij}^{(n)}(t)\}$ als Funktion von n monoton nichtfallend und beschränkt ist.

(i) Monotonie: Für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(0)}(s)\, ds \\ &= \delta_{ij} e^{-q_i t} \geq 0 = \sigma_{ij}^{(0)}(t).\end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt allgemein $\sigma_{ij}^{(n)}(t) \geq \sigma_{ij}^{(n-1)}(t)$ für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$ an und schließen von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \\ &\geq \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n-1)}(s)\, ds = \sigma_{ij}^{(n)}(t)\end{aligned}$$

(aufgrund der Induktionsvoraussetzung und aufgrund der Monotonie des Integrals sowie der Tatsache $q_{ik} \geq 0$ für $k \neq i$).

(ii) Es bleibt zu zeigen, dass $\{\sigma_{ij}^{(n)}(t)\}$ nach oben beschränkt ist; dies erfolgt durch Induktion über n. Es gilt

$$\sigma_{ij}^{(1)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} \leq 1,$$

für alle $i, j \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

Induktionsannahme: $\sigma_{ij}^{(n)}(t) \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &= \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \\
&\leq \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\, ds = \delta_{ij} e^{-q_i t} + e^{-q_i t} \cdot \left(\sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \right) \int_0^t e^{q_i s}\, ds \\
&= \delta_{ij} e^{-q_i t} + e^{-q_i t} \cdot q_i \cdot \left(\frac{1}{q_i} e^{q_i s} \Big|_0^t \right) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + e^{-q_i t} \cdot q_i \cdot \left[\frac{1}{q_i} e^{q_i t} - \frac{1}{q_i} \right] \\
&= \delta_{ij} e^{-q_i t} + 1 - e^{-q_i t} \leq 1.
\end{aligned}$$

Da $\{\sigma_{ij}^{(n)}(t)\}$ monoton nichtfallend und beschränkt ist, existiert der Grenzwert

$$f_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{ij}^{(n)}(t).$$

Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz folgt aus der Definition von $\sigma_{ij}^{(n)}(t)$ sofort

$$f_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} f_{kj}(s)\, ds \quad (i,j \in E;\, t \in \mathbb{R}^+)$$

und nach Satz 22.34 ist damit gezeigt, dass $\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ die Rückwärtsgleichungen erfüllt. Zum Nachweis der Vorwärtsgleichungen reicht es zu zeigen, dass $\{\sigma_{ij}^{(n)}(t)\}$ auch die an die Vorwärtsgleichung angepasste Iteration

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_j t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq j}} \int_0^t e^{-q_j(t-s)} \sigma_{ik}^{(n)}(s) q_{kj}\, ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{22.10}$$

erfüllt. Dann liefert erneute Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz direkt die Vorwärtsgleichung in der integralen Version aus Satz 22.34.
Der Nachweis von (22.10) erfolgt durch Induktion. Wegen $\sigma_{ij}^{(0)}(t) \equiv 0$ ist

$$\sigma_{ij}^{(1)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} = \delta_{ij} e^{-q_j t},$$

d.h. für $n = 0$ ist (22.10) richtig. Sei (22.10) nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i, j \in E$, $t \geq 0$ nachgewiesen. Dann folgt unter Verwendung des Satzes von Fubini und der Definition der

$\sigma_{ij}^{(n)}(t)$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &\overset{Def.}{=} \delta_{ij}e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \\
&\overset{I.V.}{=} \delta_{ij}e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \left(\delta_{kj}e^{-q_k s} + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^s e^{-q_j(s-u)}\sigma_{k\ell}^{(n-1)}(u) q_{\ell j}\, du \right) ds \\
&\overset{u=v+s-t}{=} \delta_{ij}e^{-q_j t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\delta_{kj}e^{-q_k s}\, ds \\
&\qquad + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \int_{t-s}^t e^{-q_j(t-v)}\sigma_{k\ell}^{(n-1)}(v+s-t) q_{\ell j}\, dv\, ds \\
&\overset{Fubini}{=} \delta_{ij}e^{-q_j t} + \delta_{ij} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ij} e^{-q_j s}\, ds \\
&\qquad + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_j(t-v)} \int_{t-v}^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\sigma_{k\ell}^{(n-1)}(v+s-t)\, ds q_{\ell j}\, dv \\
&\overset{s=t-v}{=} \delta_{ij}e^{-q_j t} + \delta_{ij} \int_0^t e^{-q_i v} q_{ij} e^{-q_j(t-v)}\, ds \\
&\qquad + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^t e^{-q_j(t-v)} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_{t-v}^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\sigma_{k\ell}^{(n-1)}(v+s-t)\, ds q_{\ell j}\, dv \\
&\overset{s=w+t-v}{=} \delta_{ij}e^{-q_j t} + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^t e^{-q_j(t-v)} \delta_{i\ell} e^{-q_i v} q_{\ell j}\, dv \\
&\qquad + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^t e^{-q_j(t-v)} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^v e^{-q_i(v-w)} q_{ik}\sigma_{k\ell}^{(n-1)}(w)\, dw q_{\ell j}\, dv \\
&= \delta_{ij}e^{-q_j t} + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^t e^{-q_j(t-v)} \left(\delta_{i\ell}e^{-q_i v} + \int_0^v e^{-q_i(v-w)} q_{ik}\sigma_{k\ell}^{(n-1)}(w)\, dw \right) q_{\ell j}\, dv \\
&\overset{Def.}{=} \delta_{ij}e^{-q_j t} + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq j}} \int_0^t e^{-q_j(t-v)} \sigma_{i\ell}^{(n)}(v) q_{\ell j}\, dv.
\end{aligned}
$$

Damit ist (22.10) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt. ■

22.36 Satz:
$\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ ist ein Q–Prozeß.

Beweis:
Es muss gezeigt werden, dass $\mathfrak{F}$ tatsächlich eine Übergangsfunktion darstellt. (Dass $f'_{ij}(0) = q_{ij}$ gilt, folgt dann wegen $f_{ij}(0) = \delta_{ij}$ direkt etwa aus der Kolmogorovschen Rückwärtsgleichung.)

(i) Es gilt $\sigma_{ij}^{(n)}(t) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $f_{ij}(t) \geq 0$ für alle $i, j \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Ferner folgt direkt aus der Definition der $\sigma_{ij}^{(n)}(t)$, dass $\lim\limits_{t \to 0+} f_{ij}(t) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in E$ ist.

(ii) Es soll

$$\sum_{j \in E} f_{ij}(t) \leq 1 \quad \forall i \in E.$$

gezeigt werden, wozu natürlich $\sum_{j \in E} \sigma_{ij}^{(n)}(t) \leq 1$ für alle $i \in E$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$ reicht. Der Nachweis erfolgt wieder durch Induktion, für $n = 1$ ist

$$\sum_{j \in E} \sigma_{ij}^{(1)}(t) = \sum_{j \in E} \delta_{ij} e^{-q_i t} = e^{-q_i t} \leq 1$$

für alle $i \in E$ und alle $t \geq 0$.
Es sei nun $\sum_{j \in E} \sigma_{ij}^{(n)}(t) \leq 1$ für alle $i \in E$ und $t \geq 0$ nachgewiesen. Aus

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds$$

folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in E} \sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &= e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \left(\sum_{j \in E} \sigma_{kj}^{(n)}(s) \right) ds \\
&\leq e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik}\, ds \\
&= e^{-q_i t} \left[1 + \left(\sum_{k \in E, k \neq i} q_{ik} \right) \int_0^t e^{-q_i s}\, ds \right] \\
&= e^{-q_i t} \left[1 + q_i \left(\frac{1}{q_i} e^{q_i t} - \frac{1}{q_i} \right) \right] \\
&= e^{-q_i t} [1 + e^{q_i t} - 1] = 1.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

(iii) $\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ erfüllt die Gleichung von Chapman–Kolmogorov. Dazu wird

$$f_{ij}^{(n)}(t) = \sigma^{(n+1)}(t) - \sigma^{(n)}(t) \qquad (i, j \in E,\ t \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert. Wegen $\sigma_{ij}^{(0)}(t) = 0$ ist dann für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$

$$f_{ij}(t) = \lim_{k\to\infty} \sigma_{ij}^{(k)}(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} f_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(t).$$

Es soll nun

$$f_{ij}^{(n)}(t+s) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k\in E} f_{ik}^{(\nu)}(t) f_{kj}^{(n-\nu)}(s) \tag{22.11}$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, $i, j \in E$ und $t, s \geq 0$ gezeigt werden. Denn dann ist

$$\begin{aligned}
f_{ij}(t+s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k\in E} f_{ik}^{(\nu)}(t) f_{kj}^{(n-\nu)}(s) \\
&= \sum_{k\in E} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} f_{ik}^{(\nu)}(t) f_{kj}^{(n-\nu)}(s) \\
&= \sum_{k\in E} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{ik}^{(\nu)} \right) \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} f_{kj}^{(n-\nu)} \right) \\
&= \sum_{k\in E} f_{ik}(t) f_{kj}(s).
\end{aligned}$$

Zum Nachweis von (22.11) wird zunächst eine Rekursion für die $f_{ij}^{(n)}(t)$ angegeben. Es ist

$$f_{ij}^{(0)}(t) = \sigma_{ij}^{(1)}(t) - \sigma_{ij}^{(0)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} \qquad (i, j \in E,\ t \geq 0)$$

und weiter

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(n+1)}(t) &= \sigma_{ij}^{(n+2)}(t) - \sigma_{ij}^{(n+1)}(t) \\
&= \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n+1)}(s)\, ds - \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \\
&= \int_0^t e^{-q_i(t-s)} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} f_{kj}^{(n)}(s)\, ds \qquad (i, j \in E,\ t \geq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

(22.11) wird nun durch Induktion über n gezeigt. Für $n = 0$ ist

$$f_{ij}^{(0)}(t+s) = \delta_{ij} e^{-q_i(t+s)} = \sum_{k\in E} \delta_{ik} e^{-q_i t} \cdot \delta_{kj} e^{-q_k s} = \sum_{k\in E} f_{ik}^{(0)}(t) f_{kj}^{(0)}(s).$$

Nun erfolgt der Schritt von n auf $n+1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n+1}\sum_{k\in E} f_{ik}^{(\nu)}(s) f_{kj}^{(n+1-\nu)}(t) &= \sum_{k\in E} f_{ik}^{(0)}(s) f_{kj}^{(n+1)}(t) + \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{k\in E} f_{ik}^{(\nu)}(s) f_{kj}^{(n+1-\nu)}(t) \\
&= \sum_{k\in E} \delta_{ik} e^{-q_i s} f_{kj}^{(n+1)}(t) + \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{k\in E} \underbrace{\sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_0^s e^{-q_i(s-u)} q_{i\ell} f_{\ell k}^{(\nu-1)}(u)}_{f_{ik}^{(\nu)}(s)}\, f_{kj}^{(n+1-\nu)}(t)\, du \\
&= e^{-q_i s} f_{ij}^{(n+1)}(t) + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_0^s e^{-q_i(s-u)} q_{i\ell} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k\in E} f_{\ell k}^{(\nu)}(u) f_{kj}^{(n-\nu)}(t)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}}\, du. \\
&= e^{-q_i s}\cdot \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-u)} q_{i\ell} f_{\ell j}^{(n)}(u)\, du + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_0^s e^{-q_i(s-u)} q_{i\ell} f_{\ell j}^{(n)}(u+t)\, du \\
&= \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(s+t-u)} q_{i\ell} f_{\ell j}^{(n)}(u)\, du + \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_t^{s+t} e^{-q_i(s+t-u)} q_{i\ell} f_{\ell j}^{(n)}(u)\, du \\
&= \sum_{\substack{\ell\in E\\ \ell\neq i}} \int_0^{s+t} e^{-q_i(s+t-u)} q_{i\ell} f_{\ell j}^{(n)}(u)\, du = f_{ij}^{(n+1)}(s+t).
\end{aligned}$$

■

22.37 Satz:
$\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ ist minimal im folgenden Sinn: Für alle Lösungen $\{z_{ij}(t)\}$ der Kolmogorovschen Rückwärtsungleichungen (oder Vorwärtsungleichungen) mit $z_{ij}(0) = \delta_{ij}$ und $z_{ij}(t) \geq 0$ für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$ gilt

$$z_{ij}(t) \geq f_{ij}(t) \qquad \forall i,j \in E \text{ und } t \in \mathbb{R}^+.$$

$z_{ij}(t)$ muss dabei nicht notwendig eine Übergangsfunktion sein.

Beweis:
Die Kolmogorovschen Rückwärtsungleichungen

$$z'_{ij}(t) \geq \sum_{k\in E} q_{ik} z_{kj}(t) \qquad (i,j\in E,\ t\geq 0)$$

sind äquivalent (siehe Beweis von Satz 22.34)

$$\frac{d}{dt}\left[z_{ij}(t)e^{q_i t}\right] \geq \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} e^{q_i t} q_{ik} z_{kj}(t) \qquad (i,j\in E,\ t\geq 0).$$

Integration liefert

$$z_{ij}(t)e^{q_i t} \geq z_{ij}(0) + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{q_i s} q_{ik} z_{kj}(s) ds \qquad (i,j \in E,\ t \geq 0)$$

und durch Multiplikation mit $e^{-q_i t}$ sowie Einsetzen von $z_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ergibt sich

$$z_{ij}(t) \geq \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} z_{kj}(s)\, ds$$

Es wird nun

$$z_{ij}(t) \geq \sigma_{ij}^{(n)}(t) \qquad (i,j \in E,\ t \geq 0)$$

durch Induktion über n gezeigt. Für $n = 0$ ist

$$z_{ij}(t) \geq 0 = \sigma_{ij}^{(0)}(t) \qquad (i,j \in E,\ t \geq 0)$$

nach Voraussetzung.
Setze nun $z_{ij}(t) \geq \sigma_{ij}^{(n)}(t)$ für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$ voraus. Dann ist auch

$$\begin{aligned} z_{ij}(t) &\geq \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} z_{kj}(s)\, ds \\ &\overset{I.V.}{\geq} \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \\ &= \sigma_{ij}^{(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Löst $\{z_{ij}(t)\}$ die Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen, so kann entsprechend verfahren werden, im Induktionsschritt wird dann (22.10) verwendet. ■

22.38 Satz:
Ist $\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ stochastisch, d.h.

$$\sum_{j\in E} f_{ij}(t) = 1 \qquad \forall i \in E,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

dann ist $\mathfrak{F}$ der einzige Q–Prozeß.

Beweis:
Sei $\{z_{ij}(t)\}$ ein beliebiger Q–Prozess bezüglich Q. Dann ist $z_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $z_{ij}(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $\{z_{ij}(t)\}$ erfüllt die Kolmogorovschen Rückwärtsungleichungen. Satz 22.37 liefert $z_{ij}(t) \geq f_{ij}(t)$ und es folgt

$$1 \geq \sum_{j\in E} z_{ij}(t) \geq \sum_{j\in E} f_{ij}(t) = 1$$

und damit $z_{ij}(t) = f_{ij}(t)$. ■

22.39 Definition:
Der in diesem Abschnitt definierte Q–Prozess $\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ heißt *Fellerprozess*. *Ist er stochastisch, so heißt die zugrunde liegende Q–Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$* *regulär*.

Ist der Fellerprozess der einzige Q-Prozess, kann er mit Methoden der Theorie der Differentialgleichungen oder der numerischen Mathematik direkt aus den Kolomogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen bestimmt werden. Deswegen ist es für praktische Anwendungen wichtig, ein Regularitätskriterium zu haben.

22.40 Definition:
Es sei für alle $i, j \in E$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda) := \int_0^\infty \sigma_{ij}^{(n)}(t) e^{-\lambda t}\, dt.$$

die Laplace–Transformierte von $\sigma_{ij}^{(n)}(t)$, und

$$\varphi_{ij}(\lambda) := \int_0^\infty f_{ij}(t) e^{-\lambda t}\, dt$$

die Laplace–Transformierte von f_{ij}.

Wir leiten nun aus der Iterationsvoschrift für $\sigma_{ij}^{(n)}(t)$ eine Iterationsvorschrift für $\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda)$ her. Zunächst gilt $\sigma_{ij}^{(0)}(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, also auch $\varphi_{ij}^{(0)}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \geq 0$.
Ferner war

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s)\, ds \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) &= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^\infty \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s) e^{-\lambda t}\, ds\, dt \\
&= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^\infty \int_0^t e^{-(\lambda + q_i)(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s) e^{-\lambda s}\, ds\, dt \\
&= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-(\lambda + q_i)(t-s)} q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s) e^{-\lambda s}\, dt\, ds, \\
&\overset{t=u+s}{=} \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda + q_i)u}\, du\, q_{ik} \sigma_{kj}^{(n)}(s) e^{-\lambda s}\, ds
\end{aligned}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{1}{\lambda + q_i} \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik} \int\limits_0^\infty \sigma_{kj}^{(n)}(s) e^{-\lambda s}\, ds$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{1}{\lambda + q_i} \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bzw.

$$(\lambda + q_i)\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) = \delta_{ij} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

22.41 Definition:
Es sei

$$d_i(t) = 1 - \sum_{j \in E} f_{ij}(t)$$

für alle $i \in E$ der sogenannte Defekt.

22.42 Bemerkung:
Offensichtlich ist $\mathfrak{F} = \{f_{ij}(t)\}$ genau dann stochastisch, wenn $d_i(t) = 0$.

Um $d_i(t)$ näher zu untersuchen, betrachtet man zunächst die Transformierte $z_i(\lambda)$.

$$\begin{aligned} z_i(\lambda) &= \lambda \int\limits_0^\infty d_i(t) e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int\limits_0^\infty \Big(1 - \sum_{j \in E} f_{ij}(t)\Big) e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, dt - \sum_{j \in E} \lambda \int\limits_0^\infty f_{ij}(t) e^{-\lambda t}\, dt = 1 - \lambda \sum_{j \in E} \varphi_{ij}(\lambda) \\ &= \lim_{n \to \infty} \Big(1 - \lambda \sum_{j \in E} \varphi_{ij}^{(n)}(\lambda)\Big) = \lim_{n \to \infty} z_i^{(n)}(\lambda), \end{aligned}$$

wobei

$$z_i^{(n)}(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} \varphi_{ij}^{(n)}(\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

22.43 Bemerkung:
Man beachte, dass $z_i(\lambda) \leq 1$ für $|d_i(t)| \leq 1$.

22.44 Satz:
Sei Q eine konservative Q–Matrix. Dann gilt

$$(\lambda + q_i) z_i^{(n+1)} = \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} z_k^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{22.12}$$

mit der Anfangsbedingung $z_i^{(0)} = 1$ für alle $i \in E$.

Beweis:
Für alle $i \in E$ ist

$$z_i^{(0)} = 1 - \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}^{(0)}(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j\in E} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sigma_{ij}^{(0)}(t)\, dt = 1 - 0 = 1.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
& & (\lambda + q_i)\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) &= \delta_{ij} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \\
&\Longrightarrow & \lambda \varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) &= \frac{\lambda \cdot \delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \\
&\Longrightarrow & \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) &= \frac{\lambda}{\lambda + q_i} + \frac{1}{\lambda + q_i} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \\
&\Longrightarrow & 1 - \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) &= 1 - \frac{\lambda}{\lambda + q_i} - \frac{1}{\lambda + q_i} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \\
&\Longrightarrow & (\lambda + q_i) z_i^{(n+1)}(\lambda) &= \lambda + q_i - \lambda - \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda) \\
& & &= \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \Big(1 - \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{kj}^{(n)}(\lambda)\Big) \\
& & &= \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} z_k^{(n)}.
\end{aligned}$$

■

22.45 Satz:
Sei $\lambda > 0$ und $\xi = \{\xi_i\}$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$(\lambda + q_i)\xi_i = \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik} \xi_k \qquad \forall i \in E,$$

mit $\|\xi\| = \sup_{i\in E} |\xi_i| \leq 1$, dann gilt:

$$-z_i(\lambda) \leq \xi_i \leq +z_i(\lambda) \qquad \forall i \in E.$$

Beweis:
Wir zeigen durch Induktion $\xi_i \leq z_i^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zunächst gilt $\xi_i \leq 1 = z_i^{(0)}$ für alle $i \in E$ und weiter

$$(\lambda + q_i)\xi_i = \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik}\xi_k \overset{I.V.}{\leq} \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik} z_k^{(n)}(\lambda) = (\lambda + q_i) z_k^{(n+1)}(\lambda).$$

Entsprechend wird auch $-z_i^{(n)}(\lambda) \leq \xi_i$ für alle $i \in E$ gezeigt. ■

22.46 Satz (Regularitätskriterium von Reuter):
Betrachte das Gleichungssystem

$$(\lambda + q_i)\xi_i = \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} q_{ik}\xi_k \qquad \forall i \in E. \tag{22.13}$$

Jede der beiden nachstehenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, dass der Fellerprozess stochastisch ist:

a) Für ein beliebiges $\lambda > 0$ ist $\xi_i = 0$ für alle $i \in E$ die einzige beschränkte Lösung.

b) Für ein beliebiges $\lambda > 0$ ist $\xi_i = 0$ für alle $i \in E$ die einzige nichtnegative, beschränkte Lösung.

Insbesondere ist jede dieser beiden Bedingungen hinreichend dafür, dass der Fellerprozess der einzige Q-Prozess ist.

Beweis:
Ist $\{f_{ij}(t)\}$ stochastisch, so folgt $d_i(t) = 0$ für alle $i \in E$. Damit wiederum folgt, dass $z_i(\lambda) = 0$ und somit nach Satz 22.45 $\xi_i = 0$ für alle $i \in E$ die einzige beschränkte Lösung und erst recht die einzige nichtnegative beschränkte Lösung ist.
Sei nun umgekehrt $\xi_i = 0$ für alle $i \in E$ die einzige nichtnegative beschränkte Lösung. Da aber $z_i(\lambda)$ nichtnegativ und beschränkt ist und eine Lösung von (22.13) darstellt (folgt durch Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz auf (22.12)), wird $z_i(\lambda) = 0$, somit auch $d_i(t) = 0$ und schließlich $\sum_{j \in E} f_{ij}(t) = 1$. ■

22.47 Bemerkung:
Unter der Voraussetzung, dass Q konservativ ist, lässt sich zeigen, dass der Fellerprozess genau dann der einzige Q-Prozess ist, wenn er stochastisch ist, vgl. *W. J. Anderson: Continuous-Time Markov Chains, Corollary 2.5*. Daher sind für konservatives Q die beiden im Regularitätskriterium von Reuter angeführten Bedingungen sogar notwendig und hinreichend dafür, dass der Fellerprozess der einzige Q-Prozess ist.

In Bemerkung 22.32 wurde erwähnt, dass für beschränkte Q–Matrizen e^{tQ} der eindeutig definierte Q–Prozess ist. Die Eindeutigkeit ergibt sich nun auch unmittelbar als Folgerung aus dem Regularitätskriterium von Reuter.

22.48 Satz:
Ist $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$ konservativ mit $\sup_{i\in E} q_i < \infty$, so ist Q regulär.

Beweis:
Es sei $K := \sup_{i\in E} q_i < \infty$. Ferner sei $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine nichtnegative und beschränkte Lösung von (22.13). Dann folgt

$$
\begin{aligned}
& \xi_i = \frac{1}{\lambda + q_i} \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik}\xi_k \leq \frac{1}{\lambda+q_i}\left(\sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} q_{ik}\right) \sup_{k\in E} |\xi_k| \\
\Longrightarrow \quad & \sup_{i\in E} |\xi_i| \leq \sup_{i\in E} \frac{q_i}{\lambda+q_i} \cdot \sup_{k\in E} |\xi_k| \leq \frac{K}{\lambda+K} \sup_{k\in E} |\xi_k| \\
\Longrightarrow \quad & \xi_i = 0 \qquad \forall i \in E,
\end{aligned}
$$

so dass nach dem Regularitätskriterium von Reuter Q regulär und der Felleprozess der einzige Q-Prozess ist. ∎

22.5 Anwendungen

Poissonprozess

Wir kehren zum Poissonprozess aus Beispiel 22.33 zurück. Die zugrundeliegende Q-Matrix ist $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit beliebigem $\lambda > 0$ und

$$
q_{ij} = \begin{cases} -\lambda \ , & i = j, \\ \lambda \ , & j = i+1, \\ 0 \ , & \text{sonst.} \end{cases}
$$

In Beispiel 22.33 wurden die Übergangsgwahrscheinlichkeiten bereits berechnet. Wir wollen sie nun noch einmal auf eine andere Weise berechnen, nämlich aus den Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} P_{i0}(t) = -\lambda P_{i0}(t) \qquad (t \geq 0) \\
& \frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k\in E} P_{ik}(t) q_{kj} = \lambda P_{i,j-1}(t) - \lambda P_{ij}(t) \qquad (j = 1, 2, \dots; \ t \geq 0).
\end{aligned}
$$

Wir setzen

$$
P_i(z,t) := \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) z^j \qquad (i \in \mathbb{N}_0, |z| \leq 1)
$$

und erhalten

$$
\frac{d}{dt} P_i(z,t) = \lambda z P_i(z,t) - \lambda P_i(z,t) = \lambda(z-1) P_i(z,t).
$$

Man verifiziert unschwer, dass

$$
P_i(z,t) = P_i(z,0) \cdot e^{\lambda(z-1)t} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{ij} z^j\right) \cdot e^{\lambda(z-1)t} = z^i \cdot e^{\lambda(z-1)t}
$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wegen

$$z^i e^{\lambda(z-1)t} = z^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^j}{j!} e^{-\lambda t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} z^{j+i} = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} z^j$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & , \quad j \geq i, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

folgt. Da Q konservativ und beschränkt und somit regulär ist, fällt $\{P_{ij}(t)\}$ mit $\mathfrak{F}$ zusammen.

Der verallgemeinerte Geburts– und Todesprozeß

$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seien zwei reellwertige Zahlenfolgen mit $\lambda_0 \geq 0$ und $\lambda_n > 0$ sowie $\mu_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine Q–Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ mit $E = \mathbb{N}_0$ und

$$q_{ij} := \begin{cases} -\lambda_0 & , \quad i = j = 0, \\ -(\lambda_i + \mu_i) & , \quad j = i, i \in \mathbb{N}, \\ \lambda_i & , \quad j = i+1, i \in \mathbb{N}_0, \\ \mu_i & , \quad j = i-1, i \in \mathbb{N}, \\ 0 & , \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

also

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Parameter λ_n werden als Geburtsraten, die Parameter μ_n als Sterberaten bezeichnet. Im Fall $\lambda_0 > 0$ spricht man von einem Geburts– und Todesprozeß mit Einwanderung, anderenfalls wird der Zustand $i = 0$ zum absorbierenden Zustand. Wir wollen jetzt herausfinden, unter welchen Bedingungen Q regulär ist.
Das Gleichungssystem (22.13) nimmt jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned} (\lambda + \lambda_0)\xi_0 &= \lambda_0 \xi_1 \\ (\lambda + \lambda_n + \mu_n)\xi_n &= \mu_n \xi_{n-1} + \lambda_n \xi_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

an. Die zweite Gleichung kann umgeschrieben werden als

$$\lambda_n(\xi_{n+1} - \xi_n) = \lambda \xi_n + \mu_n(\xi_n - \xi_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{22.14}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $\lambda_0 = 0$. Es folgt $\xi_0 = 0$, ξ_1 beliebig, alle übrigen ξ_n sind dann eindeutig bestimmt.

2. $\lambda_0 > 0$. Es folgt ξ_0 beliebig, alle übrigen ξ_n sind eindeutig bestimmt.

Wähle nun $\xi_1 > 0$, etwa $\xi_1 = 1$, so folgt wegen $\xi_1 = (\lambda + \lambda_0)\xi_0/\lambda_0$ auch $\xi_1 > \xi_0$ und induktiv aus (22.14) wegen $\mu_n > 0$ allgemein

$$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots .$$

Zur Überprüfung auf Regularität benötigen wir noch den folgenden Hilfssatz.

22.49 Satz:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnen reellwertige Zahlenfolgen mit $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $0 \le w_0 < w_1 < \dots$ sowie

$$w_{n+1} - w_n = a_n w_n + b_n(w_n - w_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{22.15}$$

Dann gilt: $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann beschränkt, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n a_{n-1} + b_n b_{n-1} a_{n-2} \dots + b_n b_{n-1} \dots b_2 a_1 + b_n \dots b_1) < \infty.$$

Beweis:
Durch wiederholte Anwendung der Rekursion (22.15) erhält man

$$w_{n+1} - w_n = a_n w_n + b_n a_{n-1} w_{n-1} + \dots + b_n b_{b-1} \dots b_2 a_1 w_1 + b_n \dots b_1(w_1 - w_0).$$

Da $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als streng monoton wachsend vorausgesetzt war, ergeben sich hieraus die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &\ge (a_n + b_n a_{n-1} + \dots + b_n b_{n-1} \dots b_2 a_1 + b_n \dots b_1)(w_1 - w_0) \\ w_{n+1} - w_n &\le (a_n + b_n a_{n-1} + \dots + b_n b_{n-1} \dots b_2 a_1 + b_n \dots b_1) w_n \end{aligned}$$

wofür wir abkürzend

$$\psi_n(w_1 - w_0) \le w_{n+1} - w_n \le \psi_n w_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

schreiben wollen. Aus

$$\psi_1(w_1 - w_0) \le w_2 - w_1 \le \psi_1 w_1, \qquad \psi_2(w_1 - w_0) \le w_3 - w_2 \le \psi_2 w_2, \ \dots$$

folgt zum einen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \psi_k(w_1 - w_0) \le w_n - w_1 \qquad \text{bzw.} \qquad w_1 + (w_1 - w_0)\sum_{k=1}^{n-1} \psi_k \le w_n,$$

und zum anderen

$$w_2 \le (\psi_1 + 1)w_1, \ w_3 \le (\psi_2 + 1)w_2 \le (\psi_1 + 1)(\psi_2 + 1)w_1, \ \dots$$

bzw. allgemein

$$w_n \le w_1 \prod_{k=1}^{n-1}(\psi_k + 1).$$

Nach einem bekannten Satz aus der Analysis konvergiert das Produkt $\prod_{k=1}^{n-1}(\psi_k + 1)$ für $n \to \infty$ aber genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k < \infty$. ■

Wir setzen nun $w_n = \xi_n$, $a_n = \lambda/\lambda_n$ und $b_n = \mu_n/\lambda_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\psi_n = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n \cdots \mu_2}{\lambda_n \ldots \lambda_2 \lambda_1} \right) + \frac{\mu_n \cdots \mu_1}{\lambda_n \ldots \lambda_1}.$$

Somit ist $\{\xi_i\}$ beschränkt genau dann, wenn

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n \cdots \mu_2}{\lambda_n \ldots \lambda_2 \lambda_1} \right) < \infty.$$

22.50 Satz:
Der verallgemeinerte Geburts– und Todesprozeß mit den Geburtsraten λ_n und den Sterberaten μ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ ist genau dann regulär, wenn $R = \infty$.
Es gibt keine allgemeine explizite geschlossene Lösungsdarstellung .

Linearer Wachstumsprozess (Yule–Prozess)

Als eine etwas konkretere Anwendung der Reuterschen Regularitätstheorie wollen wir die Reproduktion eines Bakteriums bzw. einer Zellkultur betrachten. Dazu treffen wir die folgenden Annahmen. Die Anfangspopulation zum Zeitpunkt $t = 0$ betrage i Einheiten. Jedes Mitglied der Population teilt sich innerhalb einer mit dem Parameter $\lambda > 0$ exponentiell–verteilten Zeit in zwei identische neue Einheiten und zwar unabhängig von allen übrigen Mitgliedern der Population. Bezeichnet X_t die Größe der Population zum Zeitpunkt t, dann definiert $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ einen homogenen Markovprozess mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2, \ldots\}$ (Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung). Wir berechnen nun zunächst die infinitesimalen Übergangswahrscheinlichkeiten.

$$\begin{aligned}
P_{ii}(\Delta t) &= P(\text{„kein Übergang in } (t, t+\Delta t]\text{“}) \\
&= P(\text{„verbleibende Reproduktionszeit zum Zeitpunkt } t \\
&\qquad \text{ist für jedes Mitglied größer als } \Delta t\text{“}) \\
&= \left(e^{-\lambda \Delta t}\right)^i = 1 - i\lambda\Delta t + o(\Delta t) \quad (i = 1, 2, \ldots), \\
P_{i,i+1}(\Delta t) &= P(\text{„von } i \text{ Individuen teilt sich in } (t, t+\Delta t] \text{ genau eins“}) \\
&= \binom{i}{1}(1 - e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\lambda\Delta t})^{i-1} = i \cdot \lambda\Delta t + o(\Delta t)\,, \\
P_{i,i+k}(\Delta t) &= \binom{i}{k}(1 - e^{-\lambda\Delta t})^k(e^{-\lambda\Delta t})^{i-k} = o(\Delta t) \quad (k = 2, 3, \ldots).
\end{aligned}$$

Da es sich um einen reinen Wachstumsprozeß handelt, ist $P_{ij}(\Delta t) = 0$ für $j < i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Die Übergangsintensitäten q_{ij} erhält man durch die Grenzprozesse

$$\begin{aligned}
q_{ii} &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = -i\lambda \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \\
q_{i,i+1} &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{P_{i,i+1}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = i\lambda \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Ansonsten gilt $q_{ij} = 0$ und folglich ist Q konservativ. Da es sich hier um einen Spezialfall des verallgemeinerten Geburts– und Todesprozess handelt ($\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = 0$), folgt wegen

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

die Regularität von $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$.
Wir kommen nun zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten. Hierfür ziehen wir die Kolmogorovschen Rückwärtsgleichungen heran, die sich hier wegen $P_{ij}(t) = 0$ für $j < i$ etwas vereinfachen. Es gilt

$$\begin{aligned} P'_{ii}(t) &= -i\lambda P_{ii}(t) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots), \\ P'_{ij}(t) &= -i\lambda P_{ij}(t) + i\lambda P_{i+1,j}(t) \qquad (j \geq i+1). \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt wegen $P_{ii}(0) = 1$ sofort

$$P_{ii}(t) = e^{-i\lambda t} \qquad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Einsetzen in die untere Gleichung für $j = i+1$ führt zu

$$\begin{aligned} & P'_{i,i+1}(t) = -i\lambda P_{i,i+1}(t) + i\lambda P_{i+1,i+1}(t) = -i\lambda P_{i,i+1}(t) + i\lambda e^{-(i+1)\lambda t} \\ \iff \quad & P'_{i,i+1}(t)e^{i\lambda t} = -i\lambda P_{i,i+1}(t)e^{i\lambda t} + i\lambda e^{-\lambda t} \\ \iff \quad & \frac{d}{dt}\Big(P_{i,i+1}(t)e^{i\lambda t}\Big) = i\lambda e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

bzw.

$$e^{i\lambda t}P_{i,i+1}(t) = \int_0^t i\lambda e^{-\lambda s}\, ds + c,$$

wobei aus $P_{i,i+1}(0) = \delta_{i,i+1} = 0$ sofort $c = 0$ folgt. Damit gelangen wir zu

$$e^{i\lambda t}P_{i,i+1}(t) = \int_0^t i\lambda e^{-\lambda s}\, ds = i\Big(-e^{-\lambda s}\Big|_0^t \Big) = i(1 - e^{-\lambda t}),$$

bzw.

$$P_{i,i+1}(t) = ie^{-i\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots;\, t \in \mathbb{R}^+).$$

Entsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} P'_{i,i+2}(t) &= -i\lambda P_{i,i+2}(t) + i\lambda P_{i+1,i+2}(t) \\ &= -i\lambda P_{i,i+2}(t) + i\lambda\Big[(i+1)e^{-(i+1)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})\Big] \\ \iff \quad P'_{i,i+2}(t)e^{i\lambda t} &= -i\lambda P_{i,i+2}(t)e^{i\lambda t} + i\lambda\Big[(i+1)e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})\Big] \\ \iff \quad \frac{d}{dt}\Big(P_{i,i+2}(t)e^{i\lambda t}\Big) &= i\lambda\Big[(i+1)e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})\Big] \\ \iff \quad P_{i,i+2}(t) &= e^{-i\lambda t}\int_0^t i\lambda(i+1)e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda s})\, ds \\ &= i(i+1)e^{-i\lambda t}\Big[(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}(e^{-2\lambda t} - 1)\Big] \\ &= \frac{i(i+1)}{2}e^{-i\lambda t}[2 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t} - 1] \\ &= \frac{i(i+1)}{2}e^{-i\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^2, \end{aligned}$$

und schließlich mit Hilfe vollständiger Induktion

$$P_{ik}(t) = \frac{i(i+1)\dots(k-1)}{(k-i)!} e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-i} \quad (k > i;\ t \in \mathbb{R}^+).$$

t	$k=2$	$k=3$	$k=5$	$k=10$
0.5	0.172	0.0381	0.0019	$9.87 \cdot 10^{-7}$
1	0.239	0.0939	0.0145	0.000137
1.5	0.249	0.1315	0.0366	0.001497
2	0.233	0.1470	0.0587	0.005928
3	0.173	0.1347	0.0813	0.022998
5	0.0753	0.0692	0.0583	0.03797
7	0.0293	0.0284	0.0267	0.0229
10	0.0067	0.0066	0.0066	0.00634
15	$5.53 \cdot 10^{-4}$	$5.52 \cdot 10^{-4}$	$5.52 \cdot 10^{-4}$	$5.50 \cdot 10^{-4}$

Übergangswahrscheinlichkeiten des Yule-Prozesses
für $i = 1$, $k = 2, 3, 5$ und 10 und $\lambda = 0.5$.

Linearer Wachstumsprozess mit Einwanderung

Der Yule–Prozess war ein reiner Geburtsprozess mit linear ansteigenden Geburtsraten. Ein etwas allgemeinerer Prozess ist der lineare Wachstumsprozess mit Einwanderung. Darunter versteht man einen Geburts– und Todesprozess mit $\lambda_n = \lambda \cdot n + a$ und $\mu_n = \mu \cdot n$, wobei $\lambda, \mu, a > 0$. Lineare Wachstumsprozesse beschreiben die Reproduktion von Bakterien, Zellen, Krankheiten und Bevölkerungen. Es ist

$$R' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda n + a}$$

eine divergente Minorante von R, weshalb die zugehörige Q–Matrix regulär ist. Die Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen lauten hier

$$\begin{aligned} P'_{i0}(t) &= -aP_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t) \\ P'_{ij}(t) &= (\lambda(j-1)+a)P_{i,j-1}(t) - ((\lambda+\mu)j + a)P_{ij}(t) + \mu(j+1)P_{i,j+1}(t) \quad (j = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, die mittlere Population zur Zeit t,

$$M_i(t) := \mathbf{E}[X_t \mid X_0 = i] = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{ij}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

zu bestimmen (sogenannte Erwartungswertfunktion). Durch gliedweises Differenzieren und Einsetzen der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen erhält man

$$\begin{aligned}
M_i'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} jP_{ij}'(t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j(\lambda(j-1)+a)P_{i,j-1}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} j((\lambda+\mu)j+a)P_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} j\mu(j+1)P_{i,j+1}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(\lambda j+a)P_{i,j}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} j((\lambda+\mu)j+a)P_{ij}(t) + \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)\mu j P_{i,j}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} [(j+1)(\lambda j+a) - j((\lambda+\mu)j+a) + (j-1)\mu j]P_{i,j}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda-\mu)j+a)P_{i,j}(t) \\
&= (\lambda-\mu)M_i(t)+a, \qquad t \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$M_i(0) = \sum_{j=1}^{\infty} jP_{ij}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} j\delta_{ij} = i.$$

Damit ergibt sich

$$M_i(t) = \begin{cases} at+i & , \quad \lambda = \mu, \\ \dfrac{a}{\lambda-\mu}(e^{(\lambda-\mu)t}-1)+ie^{(\lambda-\mu)t} & , \quad \lambda \neq \mu, \end{cases}$$

und wir beobachten

$$\lim_{t\to\infty} M_i(t) = \begin{cases} \infty & , \quad \lambda \geq \mu, \\ \dfrac{a}{\mu-\lambda} & , \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Speziell für den Yule–Prozess, also $\mu = a = 0$, gilt $M_i(t) = i \cdot e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

$a=1,\ i=0$	$\lambda-\mu$			
t	-2	-1	0	1
0.5	0.316	0.393	0.5	0.649
1	0.432	0.632	1	1.718
2	0.491	0.865	2	6.389
3	0.499	0.950	3	19.09
5	0.499977	0.993	5	147.4
10	0.500000	0.999955	10	22025.5
100	0.500000	1.000000	100	$2.69 \cdot 10^{43}$

$a=1,\ i=10$	$\lambda-\mu$			
t	-2	-1	0	1
0.5	3.995	6.459	10.5	17.14
1	1.786	4.311	11	28.90
2	0.674	2.218	12	80.28
3	0.524	1.448	13	219.9
5	0.5004	1.061	15	1631.5
10	0.500000	1.0004	20	$2.42\cdot 10^5$
100	0.500000	1.000000	110	$2.96\cdot 10^{44}$

$M_i(t)$ in Abhängigkeit von i, $\lambda-\nu$, a und t.

Bediensysteme mit unbeschränkter Kapazität ($M/M/\infty$)

Wir betrachten ein Bediensystem mit Poissonschen Eingangsstrom der Intensität λ und exponentialverteilten Bedienzeiten mit Parameter μ und nehmen an, dass unendlich viele parallele Bediengeräte zur Verfügung stehen. Der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ der zur Zeit t anwesenden Kunden stellt einen homogenen Markovprozess mit dem Zustandsraum $E=\{0,1,2,\dots\}$ dar. Für den Ankunftsstrom gilt

$$
\begin{aligned}
P(\text{„in } (t,t+\Delta t] \text{ treffen } k \text{ Kunden ein“}) &= \frac{(\lambda\cdot\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}\\
&= \begin{cases} 1-\lambda\Delta t+o(\Delta t) & ,\quad k=0,\\ \lambda\Delta t+o(\Delta t) & ,\quad k=1,\\ o(\Delta t) & ,\quad k\geq 2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Entsprechend gilt auch für jede einzelne Bedienung

$$
P(\text{„in } (t,t+\Delta t] \text{ werden } k \text{ Kunden bedient“}) = \begin{cases} 1-\mu\Delta t+o(\Delta t) & ,\quad k=0,\\ \mu\Delta t+o(\Delta t) & ,\quad k=1,\\ o(\Delta t) & ,\quad k\geq 2,\end{cases}
$$

falls sich wenigstens ein Kunde im System befindet. Da es so viele Bedienungen gibt, wie Kunden im System sind, gilt insgesamt

$$
P(\text{„in } (t,t+\Delta t] \text{ werden } k \text{ Kunden bedient“}) = \begin{cases} 1-n\mu\Delta t+o(\Delta t) & ,\quad k=0,\\ n\mu\Delta t+o(\Delta t) & ,\quad k=1,\\ o(\Delta t) & ,\quad k\geq 2,\end{cases}
$$

falls sich genau n Kunden zum Zeitpunkt t im System befinden. Es ergibt sich

$$
Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \\ & & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},
$$

d.h. es handelt sich um einen allgemeinen Geburts– und Todesprozess mit $\lambda_n = \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mu_n = n\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} = \infty$$

eine divergente Minorante von R ist, ist Q regulär.

Es sollen nun die Werte von $P_{ij}(t)$ berechnet werden. Die Kolmogoroschen Vorwärtsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
&P'_{i0}(t) = -\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t) \\
&P'_{ij}(t) = -(\lambda + j\mu)P_{ij}(t) + (j+1)\mu P_{i,j+1}(t) + \lambda P_{i,j-1}(t) \quad (j = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Zur Behandlung dieses Differenzen–Differentialgleichungssystem führen wir wieder die erzeugende Funktion

$$P(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) z^j, \qquad |z| \le 1,$$

ein. Indem wir beide Seiten der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen mit z^j multiplizieren und über alle j summieren, bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} P'_{ij}(t) z^j &= -\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda + j\mu) P_{ij}(t) z^j + \mu \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) P_{i,j+1}(t) z^j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} P_{i,j-1}(t) z^j \\
&= -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) z^j - \mu z \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t) j z^{j-1} + \mu \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j+1}(t)(j+1) z^j \\
&\quad + \lambda z \sum_{j=1}^{\infty} P_{i,j-1}(t) z^{j-1}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) z^j &= \sum_{j=1}^{\infty} P_{i,j-1}(t) z^{j-1} = P(z,t) \\
\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t) j z^{j-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j+1}(t)(j+1) z^j = \frac{\partial P(z,t)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} &= -\lambda P(z,t) - \mu z \frac{\partial P(z,t)}{\partial z} + \mu \frac{\partial P(z,t)}{\partial z} + \lambda z P(z,t) \\
&= \mu(1-z) \frac{\partial P(z,t)}{\partial z} - \lambda(1-z) P(z,t). \qquad (22.16)
\end{aligned}$$

Um diese partielle Differentialgleichung zu lösen, setzen wir

$$P(z,t) = G(z,t) F(z,t)$$

mit $G(z,t) = e^{\varrho(z-1)(1-e^{-\mu t})}$ und $\varrho = \lambda/\mu$ an. Damit wird

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = G(z,t)\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + F(z,t)\cdot G(z,t)\cdot\lambda(z-1)e^{-\mu t}$$
$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial z} = G(z,t)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} + F(z,t)\cdot G(z,t)\cdot\varrho(1-e^{-\mu t}).$$

Setzt man diese Ergebnisse in die Differentialgleichung (22.16) ein, erhält man

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial P(z,t)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial P(z,t)}{\partial z} - \lambda(z-1)P(z,t)\\ &= G(z,t)\cdot\Bigg[\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + F(z,t)\cdot\lambda(z-1)e^{-\mu t} + \mu(z-1)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}\\ &\qquad +\lambda(z-1)(1-e^{-\mu t})\cdot F(z,t) - \lambda(z-1)\cdot F(z,t)\Bigg]\\ &= G(z,t)\cdot\left[\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z}\right].\end{aligned}$$

Unter Beachtung von $G(z,t)\neq 0$ folgt

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = 0. \tag{22.17}$$

Man überprüft unschwer, dass jede Lösung von (22.17) von der Form

$$F(z,t) = g((z-1)e^{-\mu t})$$

ist. Mit $\ell = (z-1)e^{-\mu t}$ ergibt sich nämlich

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(\ell)}{\partial \ell}\cdot\frac{\partial \ell}{\partial t} = \frac{\partial g(\ell)}{\partial \ell}\cdot(z-1)\cdot(-\mu)\cdot e^{-\mu t}$$
$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial g(\ell)}{\partial \ell}\cdot\frac{\partial \ell}{\partial z} = \frac{\partial g(\ell)}{\partial \ell}\cdot e^{-\mu t}.$$

Damit wird allgemein

$$P(z,t) = e^{\varrho(z-1)(1-e^{-\mu t})}g((z-1)e^{-\mu t}).$$

Die Anfangsbedingung erhalten wir aus der Modellannahme, dass wir stets mit einem leerem System starten, d.h. es gilt anfänglich $i=0$. Aus

$$P(z,0) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}(0)z^j = \sum_{j=0}^{\infty}\delta_{0j}z^j = 1$$

folgt somit $1 = g(z-1)$ und daher

$$P(z,t) = e^{\varrho(z-1)(1-e^{-\mu t})} = e^{c(z-1)}.$$

Abschließend wird

$$P_{0j}(t) = \frac{1}{j!}\left.\frac{\partial^j P(z,t)}{\partial z^j}\right|_{z=0} = \left.\frac{1}{j!}c^j e^{c(z-1)}\right|_{z=0} = \frac{((1-e^{-\mu t})\varrho)^j}{j!}e^{-(1-e^{-\mu t})\varrho}\quad j\in\mathbb{N}_0,$$

was einer Poisson–Verteilung mit Parameter $(1-e^{-\mu t})\varrho$ entspricht. Insbesondere gilt

$$E[X_t|X_0=i] = (1-e^{-\mu t})\varrho,\qquad t\in\mathbb{R}^+.$$

$\mu = 1,\ \varrho = 0.5$	j				
t	0	1	2	3	5
0.25	0.895	0.099	0.0055	0.0002	$1.23 \cdot 10^{-7}$
0.5	0.821	0.162	0.0159	0.0010	$2.02 \cdot 10^{-6}$
1	0.729	0.230	0.0364	0.0038	$1.92 \cdot 10^{-5}$
2	0.649	0.281	0.0607	0.0087	$8.17 \cdot 10^{-5}$
5	0.609	0.302	0.0751	0.0124	$1.53 \cdot 10^{-4}$
10	0.607	0.303	0.0758	0.0126	$1.58 \cdot 10^{-4}$
20	0.607	0.303	0.0758	0.0126	$1.58 \cdot 10^{-4}$

Werte für $P_{0j}(t)$ in Abhängigkeit von μ, ϱ und t.

Anwendung findet dieses Modell etwa bei Problemen der Produkthaftung. Es sei X_t die Anzahl intakter Geräte zur Zeit t. Die Anzahl produzierter Teile in $(0,t]$ sei N_t (Produktionsrate λ). Mit Y_t beschreiben wir die Anzahl ausgefallener Geräte in $(0,t]$ (Ausfallrate μ). Dann gilt

$$Y_t = N_t - X_t \Longrightarrow \mathbf{E}[Y_t] = \mathbf{E}[N_t] - \mathbf{E}[X_t] \Longrightarrow \mathbf{E}[Y_t] = \lambda t - \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Zweidimensionale Competitionprozesse

Zweidimensionale Competitionprozesse stellen eine weitere Verallgemeinerung von Geburts– und Todesprozessen dar, das Regularitätskriterium aus Satz 22.50 soll auf diese Prozesse ausgedehnt werden.
Es seien E_1 und E_2 zwei abzählbare Mengen, o. B. d. A. entweder $\mathbb{N}_0$ oder $\{0, 1, \ldots, n\}$; wenigstens eine der beiden Mengen sei abzählbar unendlich. Wir sagen, $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ gehört zur Klasse Γ_{E_1,E_2}, wenn die Elemente $q_{(u,v),(m,n)}$ dem folgenden Schema genügen:

(m,n)	$q_{(u,v),(m,n)}$
$(u+1,v)$	θ^1_{uv}
$(u,v+1)$	θ^2_{uv}
$(u-1,v)$	θ^3_{uv}
$(u,v-1)$	θ^4_{uv}
$(u+1,v+1)$	θ^5_{uv}
$(u-1,v+1)$	θ^6_{uv}
$(u-1,v-1)$	θ^7_{uv}
$(u+1,v-1)$	θ^8_{uv}
$(u+i,v+j),\ \lvert i\rvert \geq 2$ oder $\lvert j\rvert \geq 2$	0
(u,v)	$-\sum_{k=1}^{8} \theta^k_{uv}.$

Die Funktionen θ^k $(k = 1, \ldots, 8)$ sind auf $E = E_1 \times E_2$ definiert und haben die nichnegativen reellen Zahlen als Wertebereich. Zusätzlich werden die Randbedingungen

$$\theta^4_{u0} = \theta^7_{u0} = \theta^8_{u0} = 0 \quad (u \in E_1) \qquad \theta^3_{0v} = \theta^6_{0v} = \theta^7_{0v} = 0 \quad (v \in E_2)$$
$$\theta^2_{uv_\sigma} = \theta^5_{uv_\sigma} = \theta^6_{uv_\sigma} = 0 \quad (u \in E_1; \quad v_\sigma = \sup E_2) \quad \text{falls } |E_2| < \infty$$
$$\theta^1_{u_\sigma v} = \theta^5_{u_\sigma v} = \theta^8_{u_\sigma v} = 0 \quad (v \in E_2; \quad u_\sigma = \sup E_1) \quad \text{falls } |E_1| < \infty$$

gefordert.

22.51 Definition:
Ein Markovprozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $E = E_1 \times E_2$ und Q–Matrix $Q \in \Gamma_{E_1,E_2}$ heißt zweidimensionaler Competitionprozess.

Für einen zweidimensionalen Competitionprozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum E und Q–Matrix Q sei

$$A = \big\{(u,v) \in E \mid q_{(u,v),(u,v)} = 0\big\}$$

die Menge seiner absorbierenden Zustände. Außerdem werden Teilmengen T_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ von E sowie reellwertige Zahlenfolgen $(M_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(m_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ausgezeichnet:

$$\begin{aligned}
T_k &:= \{(u,v) \in E \setminus A \mid u+v=k\} \quad (k \in \mathbb{N}_0),\\
M_k &:= \max_{(u,v)\in T_k} \big\{\theta^1_{uv} + \theta^2_{uv}\big\} \quad (k \in \mathbb{N}_0),\\
m_k &:= \min_{(u,v)\in T_k} \big\{\theta^3_{uv} + \theta^4_{uv}\big\} \quad (k \in \mathbb{N}_0).
\end{aligned}$$

Für $T_k = \varnothing$ sind M_k und m_k nicht definiert.
Mit diesen Bezeichnungen lässt sich nun eine Verallgemeinerung von Satz 22.50 angeben.

22.52 Satz:
$(X_t)_{t\geq 0}$ sei ein zweidimensionaler Competitionprozess mit Zustandsraum E und Q–Matrix Q. Existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $T_k \neq \varnothing$ und $M_k > 0$ für alle $k > N$ und gilt

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_k} + \frac{m_k}{M_k M_{k-1}} + \ldots + \frac{m_k \ldots m_{N+2}}{M_k \ldots M_{N+1}}\right) = \infty, \tag{22.18}$$

so ist Q regulär.

Beweis:
Für die Q–Matrix eines zweidimensionalen Competitionprozess reduziert sich das Gleichungssystem (22.13) auf das partielle Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned}
\left(\lambda + \sum_{i=1}^{8} \theta^i_{uv}\right)\xi_{(u,v)} \;=\;& \theta^1_{uv}\xi_{(u+1,v)} + \theta^2_{uv}\xi_{(u,v+1)} + \theta^3_{uv}\xi_{(u-1,v)} + \theta^4_{uv}\xi_{(u,v-1)} + \theta^5_{uv}\xi_{(u+1,v+1)}\\
&+\theta^6_{uv}\xi_{(u-1,v+1)} + \theta^7_{uv}\xi_{(u-1,v-1)} + \theta^8_{uv}\xi_{(u+1,v-1)} \quad ((u,v) \in E). \qquad (22.19)
\end{aligned}$$

Wir haben nachzuweisen, dass das System (22.19) unter den Voraussetzungen des Satzes keine positive beschränkte Lösung zulässt. Zu diesem Zweck wird das Verhalten der Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eines positiven Lösungsvektors $(\xi_{(u,v)})_{(u,v)\in E}$ von (22.19) studiert, deren Glieder durch

$$n_k := \max_{(u,v)\in T_k} \xi_{(u,v)}$$

festgelegt sind, und gezeigt, dass $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt ist. Mit (u_k, v_k) werden die (nicht notwendig eindeutig bestimmten) Stellen bezeichnet, an denen die Maxima angenommen werden. Im Falle der Mehrdeutigkeit entscheide man sich für das Tupel mit der kleinsten u–Koordinate.

Für $\theta^i_{u_k,v_k}$ wird fortan kurz θ^i_k $(i = 1,\dots,8)$ geschrieben. Aus (22.19) folgt, dass $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ für $k > 0$ der dreigliedrigen Rekursion

$$\left(\lambda + \sum_{i=1}^{4} \theta^i_k\right) n_k = \left(\theta^1_k + \theta^2_k\right) n_{k+1} + \left(\theta^3_k + \theta^4_k\right) n_{k-1}$$

genügt. Für $k > N$ folgt daraus

$$n_{k+1} - n_k = \frac{\lambda}{\theta^1_k + \theta^2_k} n_k + \frac{\theta^3_k + \theta^4_k}{\theta^1_k + \theta^2_k}(n_k - n_{k-1}).$$

Für einen beliebigen positiven Lösungsvektor $(\xi_{(u,v)})_{(u,v)\in E}$ von (22.19) sei $k_0 > n$ ein Index mit $n_{k_0} > 0$. Die Folge $(n_k)_{k\geq k_0-1}$ erfüllt dann die Voraussetzungen von Satz 22.49, wobei $a_k = \frac{\lambda}{\theta^1_k+\theta^2_k}$ und $b_k = \frac{\theta^3_k+\theta^4_k}{\theta^1_k+\theta^2_k}$ zu setzen ist. Satz 22.49 liefert nun: $(n_k)_{k\geq k_0-1}$ ist genau dann beschränkt, wenn die Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{k=k_0}^{\infty} &\left\{ \frac{\lambda}{\theta^1_k + \theta^2_k} + \frac{\lambda(\theta^3_k + \theta^4_k)}{(\theta^1_k + \theta^2_k)(\theta^1_{k-1} + \theta^2_{k-1})} + \dots + \frac{\lambda(\theta^3_k + \theta^4_k)\dots(\theta^3_{k_0+1} + \theta^4_{k_0+1})}{(\theta^1_k + \theta^2_k)\dots(\theta^1_{k_0} + \theta^2_{k_0})}\right. \\ &\left. + \frac{(\theta^3_k + \theta^4_k)\dots(\theta^3_{k_0} + \theta^4_{k_0})}{(\theta^1_k + \theta^2_k)\dots(\theta^1_{k_0} + \theta^2_{k_0})} \right\} \qquad (k_0 > n) \end{aligned} \tag{22.20}$$

konvergiert. Da die Reihe aus (22.18) eine divergente Minorante von (22.20) ist, ist $(n_k)_{k\geq k_0-1}$ und damit auch $(\xi_{(u,v)})_{(u,v)\in E}$ unbeschränkt. ∎

22.6 Verweildauern und Rückkehrzeiten

Wir sagen, j ist von i aus erreichbar, und schreiben $i \to j$, wenn es ein $t > 0$ gibt mit $P_{ij}(t) > 0$. Gilt $i \to j$ und $j \to i$, kurz $i \leftrightarrow j$, dann heißen i und j miteinander verbunden bzw. man sagt, daß i und j miteinander kommunizieren.
Für Übergangsmatrizen definiert „$\leftrightarrow$" eine Äquivalenzrelation auf E.

1. Reflexivität: Es gilt sogar $P_{ii}(t) > 0$ für alle $t > 0$, vgl. Satz 22.11.

2. Symmetrie: Gilt nach Definition.

3. Transitivität: Ist $P_{ij}(t) > 0$ und $P_{jk}(s) > 0$, so folgt mit der Gleichung von Chapman–Kolmogorov auch $P_{ik}(t+s) \geq P_{ij}(t)P_{jk}(s) > 0$.

Ein Markovprozess, dessen Zustandsraum bzgl. der Relation „$\leftrightarrow$" in genau eine Klasse zerfällt, heißt irreduzibel.
Da die Übergangswahrscheinlichkeiten im allgemeinen nicht explizit bekannt sind, stellt sich die Frage, ob man anhand von Q feststellen kann, ob ein Markovprozess irreduzibel ist oder nicht. Diesem Zusammenhang dient die nachfolgende Definition.

22.53 Definition:
Eine Q–Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$ heißt irreduzibel, wenn es zu jedem Paar $(i,j) \in E \times E$ mit $i \neq j$ eine Folge von Zuständen $(i, h_1, \dots, h_r, j)$ mit $r \geq 0$, $h_\alpha \in E$, $\alpha = 0, 1, \dots, r$, gibt mit

$$q_{ih_1} q_{h_1h_2} \cdot \dots \cdot q_{h_rj} > 0.$$

22.54 Satz:
$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sei ein homogener Markovprozess mit abzählbarem Zustandsraum E, der von einer konservativen, regulären Q–Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$ erzeugt werde. Dann gilt: $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ ist genau dann irreduzibel, wenn Q irreduzibel ist.

Beweis:

(i) Wir nehmen zunächst an, daß Q irreduzibel ist. Ist $q_{\ell k} > 0$ für $\ell \neq k$, so folgt aufgrund der Beziehung $P_{\ell k}(\Delta t) = q_{\ell k}\Delta t + o(\Delta t)$ für $\Delta t \to 0$, dass auch $P_{\ell k}(s) > 0$ für alle $s < \delta$ mit einem $\delta > 0$. Mit der Gleichung von Chapman–Kolmogorov folgt aber auch für alle $t \geq \delta$

$$P_{ij}(t) \geq P_{ij}(s)P_{jj}(t-s) > 0.$$

Aufgrund der Annahme existiert für jedes Paar $(i,j) \in E\times E$ eine Folge $(i,h_1,\ldots,h_r,j)$ von Zuständen mit $q_{ih_1}q_{h_1h_2}\cdot\cdots\cdot q_{h_rj} > 0$. Hieraus folgt aber sofort

$$P_{ih_1}(t)P_{h_1h_2}(t)\cdot\cdots\cdot P_{h_rj}(t) > 0$$

für alle $t > 0$. Mit Hilfe der Gleichung von Chapman und Kolmogorov kann man nun jeweils für beliebige $s,t > 0$ sukzessive schließen:

$$\begin{aligned}
P_{ih_2}(s+t) &= \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kh_2}(t) \geq P_{ih_1}(s)P_{h_1h_2}(t) > 0\\
P_{ih_3}(s+t) &= \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kh_3}(t) \geq P_{ih_2}(s)P_{h_2h_3}(t) > 0\\
&\vdots\\
P_{ij}(s+t) &= \sum_{k\in E} P_{ik}(s)P_{kj}(t) \geq P_{ih_r}(s)P_{h_rj}(t) > 0.
\end{aligned}$$

(ii) Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ irreduzibel. Da Q als regulär vorausgesetzt war, muss die korrespondierende Übergangsfunktion gerade der Feller–Prozess sein. Dieser lässt sich bekanntlich durch

$$f_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{ij}^{(n)}(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

darstellen, wobei

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(0)}(t) &= 0 \quad (t\in\mathbb{R}^+),\\
\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &= \delta_{ij}e^{-q_it} + \sum_{\substack{k\in E\\k\neq i}} \int_0^t e^{-q_i(t-s)}q_{ik}\sigma_{kj}^{(n)}(s)\,ds \quad (n=0,1,2,\ldots;\ t\in\mathbb{R}^+).
\end{aligned} \tag{22.21}$$

Ist $f_{ij}(t) > 0$ für $i \neq j$ und alle $t > 0$, dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sigma_{ij}^{(n_0)}(t) > 0$. In diesem Fall garantiert die Gleichung (22.21) die Existenz mindestens eines Zustandes h_{n_0-1} mit

$$q_{ih_{n_0-1}} > 0 \qquad \text{und} \qquad \sigma_{h_{n_0-1},j}^{(n_0-1)}(t) > 0,$$

denn andernfalls würde die rechte Seite von Gleichung (22.21) verschwinden, was nicht sein kann. Wenn nicht schon $h_{n_0-1} = j$ feststeht, leitet man aus $\sigma^{(n_0-1)}_{h_{n_0-1},j}(t) > 0$ wiederum die Existenz eines Zustandes h_{n_0-2} ab, für den

$$q_{h_{n_0-1}h_{n_0-2}} > 0 \qquad \text{und} \qquad \sigma^{(n_0-2)}_{h_{n_0-2},j}(t) > 0$$

gilt. Nach einer endlichen Anzahl von Iterationen gelangt man zu einer Ungleichung der Form

$$q_{ih_{n_0-1}} q_{h_{n_0-1}h_{n_0-2}} \cdot \dots \cdot q_{h_{n_0-k-1}h_{n_0-k}} > 0$$

mit $h_{n_0-k} = j$ oder bekommt

$$q_{ih_{n_0-1}} q_{h_{n_0-1}h_{n_0-2}} \cdot \dots \cdot q_{h_2h_1} > 0 \qquad \text{und} \qquad \sigma^{(1)}_{h_1j}(t) > 0.$$

Aber

$$\sigma^{(1)}_{h_1j}(t) = \delta_{h_1j} e^{-q_{h_1}t} > 0$$

bedingt $h_1 = j$. ∎

Wir kommen jetzt auf das Rückkehrverhalten von homogenen Markovprozessen zu sprechen. Definiere

$$T^{(0)}_{ij} := 0, \quad T^{(n+1)}_{ij} := \inf\left\{ t > T^{(n)}_{ij} \mid X_t = j, X_0 = i, \exists s : T^{(n)}_{ij} < s < t,\ X_s \neq j \right\}.$$

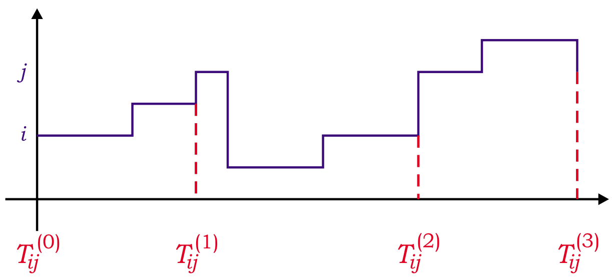


Abbildung 22.3: Eingebetteter Erneuerungsprozeß

Offensichtlich bilden die Größen $\left(T^{(n)}_{ij}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die Erneuerungszeitpunkte eines modifizierten Erneuerungsprozesses. Für die zugehörigen Lebensdauerverteilungen wählen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &:= P(T^{(1)}_{ij} \leq t) \quad (t \in \mathbb{R}^+) \\ F_j(t) &:= P(T^{(n+1)}_{ij} - T^{(n)}_{ij} \leq t) \qquad (n = 1, 2, \dots;\ t \in \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

und setzen noch $F_i := \lim_{t\to\infty} F_i(t)$ sowie $F_{ij} = \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t)$.

22.55 Definition:

- *Ein nichtabsorbierender Zustand i eines homogenen Markovprozesses heißt rekurrent, wenn $F_i = 1$, transient, wenn $F_i < 1$ ist.*

- *Ein rekurrenter Zustand heißt positiv rekurrent, wenn*

$$\mu_i := \int_0^\infty t\, dF_i(t) < \infty$$

gilt, andernfalls nullrekurrent.

- *Ein homogener Markovprozess mit lauter positiv rekurrenten Zuständen heißt ergodisch.*

22.56 Satz:
Für homogene Markovprozesse gilt

$$P(X_t = j, T_{ij}^{(1)} > t \mid X_0 = i) = \delta_{ij} e^{-q_i t} \quad (t \in \mathbb{R}^+),$$

d.h. für $j = i$ ist die Aufenthaltsdauer des Markovprozesses im Zustand i mit dem Parameter $q_i > 0$ exponentiell verteilt.

Beweis:
Für $i \neq j$ ist die Behauptung klar, für $i = j$ handelt es sich lediglich um eine Umformulierung von Satz 22.26. ■

Der nachstehende Satz beantwortet nun noch die Frage, wie oft ein Markovprozess einen bestimmten Zustand annimmt.

22.57 Satz:
Es bezeichne N_i die Anzahl der Aufenthalte in einem nicht absorbierenden Zustand i.

a) *Es ist $P(N_i = m \mid X_0 = i) = F_i^{m-1}(1 - F_i)$ für $m = 1, 2, \dots$ (geometrische Verteilung).*

b) *Für $i \neq j$ ist $P(N_j = m | X_0 = i) = \begin{cases} 1 - F_{ij} & , \quad m = 0 \\ F_{ij} F_j^{m-1}(1 - F_j) & , \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$*

c) *Es ist $P(N_i < \infty \mid x_0 = i) = \begin{cases} 1 , & F_{ii} < 1 \\ 0 , & F_{ii} = 1. \end{cases}$*

d) *Es gilt $E[N_i \mid X_0 = i] = \frac{1}{1 - F_i}$, falls $F_i < 1$.*

e) *Für $j \neq i$ und $F_j < 1$ gilt $E[N_j \mid X_0 = i] = \begin{cases} 0 & , \quad F_{ij} = 0 \\ \frac{F_{ij}}{1 - F_j} & , \quad F_{ij} \neq 0. \end{cases}$*

Beweis:

a) Das Ereignis $\{N_i = m \mid X_0 = i\}$ tritt genau dann ein, wenn $T_{ii}^{(1)} < \infty$, $T_{ii}^{(2)} - T_{ii}^{(1)} < \infty$, $\dots$, $T_{ii}^{(m-1)} - T_{ii}^{(m-2)} < \infty$, $T_{ii}^{(m)} - T_{ii}^{(m-1)} = \infty$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit für jedes der ersten $m - 1$ Ereignisse ist F_i, die für das letzte ist $1 - F_i$.

b) Mit Wahrscheinlichkeit $1 - F_{ij}$ erreicht der in i startende Markovprozess niemals den Zustand j; mit Wahrscheinlichkeit F_{ij} erreicht er ihn irgendwann, anschließend erfolgen noch soviele Aufenthalte wie bei einem in j startenden Markovprozess.

c) Unter Verwendung von a) ergibt sich die Behauptung aus

$$P(N_i < \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} P(N_i = m | X_0 = i) = \sum_{m=0}^{\infty} F_i^m (1 - F_i).$$

d) Die Behauptung folgt direkt aus der Formel für den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable.

e) Der Fall $F_{ij} = 0$ ist trivial. Für $F_{ij} > 0$ wird der Erwartungswert aus d) nur durch den Faktor F_{ij} modifiziert. ■

22.7 Grenzverhalten

Die Zustände sollen nun anhand der Übergangsfunktion auf Rekurrenz und Transienz untersucht werden, d.h. es soll ein Kriterium hergeleitet werden, dass Satz 21.25 entspricht.

22.58 Satz (Grenzverhalten von Markovprozessen):
Es sei $P(t) = (P_{ij}(t))_{i,j \in E}$, $t \geq 0$, die Übergangsfunktion einer Markovkette $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

a) $i \in E$ ist genau dann rekurrent oder absorbierend, wenn $\int\limits_0^\infty P_{ii}(t) = \infty$ ist. Umgekehrt ist $i \in E$ genau dann transient, wenn das Integral konvergiert.

b) $i \in E$ ist genau dann positiv rekurrent, wenn $\lim\limits_{t \to \infty} P_{ii}(t) > 0$ ist. Insbesondere gilt im Fall positiver Rekurrenz

$$\pi_i := \lim_{t \to \infty} P_{ii}(t) = \frac{1}{q_i \mu_i}.$$

c) Ist die Markovkette irreduzibel und $i \in E$ positiv rekurrent, so gilt für alle $k \in E$

$$\lim_{t \to \infty} P_{ki}(t) = \pi_i = \frac{1}{q_i \mu_i},$$

d.h. die Grenzwerte der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Zustand i sind unabhängig vom Anfangszustand k.

Beweis:

a) Bezeichnet N_i die Anzahl der Aufenthalte im Zustand i und T_i die Verweildauer im Zustand i, so gilt nach dem Satz von Fubini und Satz 22.57

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P_{ii}(t)dt &= \int_0^\infty E\left[\delta_{X_t,i} | X_0 = i\right] dt = E\left[\int_0^\infty \delta_{X_t,i} dt | X_0 = i\right] \\ &= E[\text{Zeit im Zustand } i] = E[N_i | X_0 = i] \cdot E[T_i] = \frac{E[T_i]}{1 - F_i}.\end{aligned}$$

Das Integral divergiert also genau dann, wenn $E[T_i] = \infty$ (absorbierendes i) oder $F_i = 1$ ist (rekurrentes i).

b) Wie schon im Fall diskreter Markovketten werden die Grenzwertaussagen aus der Erneuerungstheorie (vgl. Stochastik II) verwendet. Zunächst gilt für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$ unter Verwendung der Homogenität

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P(X_t = j \mid X_0 = i) \\ &= P(X_t = j, T_{ij}^{(1)} > t \mid X_0 = i) + P(X_t = j, T_{ij}^{(1)} \leq t \mid X_0 = i) \\ &= P(X_t = j, T_{ij}^{(1)} > t \mid X_0 = i) + P(X_{t-T_{ij}^{(1)}} = j \mid X_0 = j) \\ &= \delta_{ij} e^{-q_i t} + \int_0^t P_{jj}(t-s)\, dF_{ij}(s), \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$ ■

Speziell für $i = j$ ergibt sich die Erneuerungsgleichung

$$P_{ii}(t) = e^{-q_i t} + \int_0^t P_{ii}(t-s)\, dF_i(s), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

In der Erneuerungstheorie wurde gezeigt, dass dann

$$P_{ii}(t) = e^{-q_i t} + \int_0^t e^{-q_i(t-s)} dR_i(s), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

gilt, wobei $R_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_i)^{n*}(s)$ die Erneuerungsfunktion von F_i ist. Da $e^{-q_i t}$ direkt Riemann–integrierbar ist (vgl. Stochastik II), folgt aus dem Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie

$$P_{ii}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu_i} \int_0^\infty e^{-q_i s}\, ds = \frac{1}{q_i \mu_i},$$

also

$$\pi_i := \lim_{t\to\infty} P_{ii}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_i\mu_i} &, \text{ falls } i \text{ positiv rekurrent,} \\ 0 &, \text{ falls } i \text{ null–rekurrent.} \end{cases}$$

Der Grenzwert 0 für transientes i folgt aus der Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty P_{ii}(t)dt$.

c) Für einen irreduziblen Markovprozess ist $F_{ki} = \lim_{t\to\infty} F_{ki}(t) = 1$ für alle $k, i \in E$ und es folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{t\to\infty} P_{ki}(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_{ii}(t-s)\, dF_{ki}(s) = \lim_{t\to\infty} P_{ii}(t) \int_0^t dF_{ki}(s) = \pi_i F_{ki} = \pi_i.$$

22.59 Satz:
Es sei $i \leftrightarrow j$. Genau dann ist i transient bzw. positiv rekurrent, wenn j transient bzw. positiv rekurrent ist. Insbesondere sind für irreduzible Markovketten entweder alle Zustände transient oder alle Zustände null–rekurrent oder alle Zustände positiv rekurrent.

Beweis:
Es werden die Kriterien aus Satz 22.58 verwendet. Aufgrund der Voraussetzung existieren $s > 0$ und $u > 0$ mit $P_{ji}(s) > 0$ und $P_{ij}(u) > 0$ und aufgrund der Gleichung von Chapman–Kolmogorov folgt

$$P_{jj}(s+t+u) \geq P_{ji}(s)P_{ii}(t)P_{ij}(u).$$

Es sei nun zunächst i transient. Dann divergiert $\int P_{ii}(t)\,dt$ und es folgt

$$\int_0^\infty P_{jj}(t)\,dt \geq \int_0^\infty P_{jj}(s+t+u)\,dt \geq P_{ji}(s)P_{ij}(u)\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \infty,$$

also ist auch j transient.
Nun sei i positiv rekurrent. Dann ist $\lim P_{ii}(t) > 0$ und es folgt

$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = \lim_{t\to\infty} P_{jj}(s+t+u) \geq P_{ji}(s)P_{ij}(u) \lim_{t\to\infty} P_{ii}(t) > 0$$

und damit die positive Rekurrenz von j. Die Umkehrungen folgen aus der Symmetrie von $i \leftrightarrow j$. ■

In Satz 22.58 wurden Kriterien für Rekurrenz und Transienz formuliert, die auf der Übergangsfunktion $P_{ij}(t)$ basieren. In vielen Anwendungsfällen ist es jedoch bei gegebener Q–Matrix sehr aufwendig, den Feller–Prozess zu berechnen. Daher ist der nachstehende Satz von großer Bedeutung, da mit seiner Hilfe direkt aus den Werten der Q–Matrix ermittelt werden kann, ob Zustände positiv rekurrent sind oder nicht, und gegebenenfalls sogar die Grenzwerte π_i direkt berechnet werden können.

22.60 Satz:
Es sei $Q = (q_{ij})_{i,j\in E}$ eine konservative, reguläre und irreduzible Q–Matrix. Dann gilt: Der zugehörige Fellerprozess $\{f_{ij}(t)\}$ ist genau dann ergodisch, wenn das Gleichungssystem

$$\sum_{k\in E} y_k q_{kj} = 0 \quad (j \in E) \tag{22.22}$$

eine positive, summierbare Lösung besitzt. In diesem Fall gilt

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} f_{ij}(t) = \frac{y_j}{\sum_{i\in E} y_i} \qquad \forall j \in E.$$

Beweis:

(i) Wir setzen zunächst voraus, dass $\{f_{ij}(t)\}$ ergodisch ist. $\{f_{ij}(t)\}$ genügt den Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen

$$f'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} f_{ik}(t)q_{kj} \quad \forall i \in E.$$

Das Grenzverhalten von $\lim_{t\to\infty} f_{ij}(t)$ studieren wir anhand der zugehörigen Laplace–Transformierten

$$\overline{f_{ij}(s)} := \int_0^\infty f_{ij}(t)e^{-st}\,dt \qquad (i,j \in E),$$

die wegen $|f_{ij}(t)| \leq 1$ für $s > 0$ stets existieren. Nach einem bekannten Satz über Laplace–Transformierte gilt

$$\lim_{t\to\infty} f_{ij}(t) = \lim_{s\to 0} s\overline{f_{ij}(s)} \qquad (\forall i, j \in E).$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f'_{ij}(t)e^{-st}\,dt &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau f'_{ij}(t)e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-st} f_{ij}(t)\Big|_0^\tau + \int_0^\tau se^{-st} f_{ij}(t)\,dt \right) \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \left(e^{-s\tau} f_{ij}(\tau) - f_{ij}(0) + s\int_0^\tau e^{-st} f_{ij}(t)\,dt \right) \\
&= s\overline{f_{ij}(s)} - \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in E.
\end{aligned}$$

Wendet man die Ergebnisse auf die Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen an, bekommt man

$$s\overline{f_{ij}(s)} - \delta_{ij} = \sum_{k\in E} \overline{f_{ik}(s)} q_{kj}$$

bzw.

$$s[s\overline{f_{ij}(s)} - \delta_{ij}] = \sum_{k\in E} s\overline{f_{ik}(s)} q_{kj}.$$

Da $s\overline{f_{ik}(s)} \to \pi_{ik}$ für $s \to 0$, folgt zunächst mit dem Lemma von Fatou:

$$0 \geq \sum_{k\in E} \pi_{ik} q_{kj}.$$

Indem man beide Seiten dieser Ungleichung über j summiert und dabei $\sum_{j\in E} q_{kj} = 0$ ausnützt, erhält man

$$0 = \sum_{k\in E} \pi_{ik} q_{kj} \qquad (j \in E).$$

(ii) Sei nun $(y_k)_{k\in E}$ eine positive summierbare Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{k\in E} y_k q_{kj} = 0 \qquad (j \in E).$$

Mit

$$\sigma_{ij}^{(0)}(t) = 0,$$

$$\sigma_{ij}^{(n+1)}(t) = \delta_{ij} e^{-q_i t} + \sum_{\substack{k\in E \\ k\neq i}} \int_0^t e^{-q_j(t-s)} \sigma_{ik}^{(n)}(s) q_{kj}\,ds \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ t \in \mathbb{R}^+)$$

bezeichnen wir wieder die Approximanten der Fellerschen Minimallösung (es handelt sich dabei um die Vorwärts–Integral–Rekursion (22.10), vgl. den Beweis von Satz 22.35), d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{ij}^{(n)}(t) = f_{ij}(t) \qquad \forall i,j \in E,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Wir behaupten

$$\sum_{i\in E} y_i \sigma_{ij}^{(n)}(t) \le y_j \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich ist

$$\sum_{i\in E} y_i \sigma_{ij}^{(0)}(t) = 0 \le y_j$$

für alle $j \in E$ und auch

$$\sum_{i\in E} y_i \sigma_{ij}^{(1)}(t) = \sum_{i\in E} y_i \delta_{ij} e^{-q_i t} = y_j e^{-q_j t} \le y_j$$

für alle $j \in E$. Wir kommen zum Schritt von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in E} y_i \sigma_{ij}^{(n+1)}(t) &= y_j e^{-q_j t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} \int_0^t \sum_{i\in E} y_i \sigma_{ik}^{(n)}(s) q_{kj} e^{-q_j(t-s)}\, ds \\
&\le y_j e^{-q_j t} + \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq i}} y_k q_{kj} \int_0^t e^{-q_j(t-s)}\, ds \\
&= y_j e^{-q_j t} + y_j q_j e^{-q_j t} \left(\frac{1}{q_j} e^{q_j t} - \frac{1}{q_j} \right) \\
&= y_j \left(e^{-q_j t} + e^{-q_j t} \left(e^{q_j t} - 1 \right) \right) \\
&= y_j .
\end{aligned}$$

Nun folgt unmittelbar

$$\sum_{i\in E} y_i f_{ij}(t) = \sum_{i\in E} y_i \Big(\lim_{n\to\infty} \sigma_{ij}^{(n)}(t) \Big) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} y_i \sigma_{ij}^{(n)}(t) \le y_j .$$

für alle $j \in E$. Wegen

$$\sum_{j\in E} \sum_{i\in E} y_i f_{ij}(t) = \sum_{i\in E} y_i \sum_{j\in E} f_{ij}(t) = \sum_{i\in E} y_i = \sum_{j\in E} y_j$$

ist bereits

$$\sum_{i\in E} y_i f_{ij}(t) = y_j$$

für alle $j \in E$ und alle $t > 0$ bewiesen. Da unabhängig von t

$$\sum_{i\in E} y_i f_{ij}(t) \le \sum_{y\in E} y_i < \infty$$

gilt, liefert nun der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$y_j = \lim_{t\to\infty} \sum_{i\in E} y_i f_{ij}(t) = \sum_{i\in E} y_i \pi_j,$$

woraus

$$\pi_j = \frac{y_j}{\sum_{i\in E} y_i} \qquad (j \in E)$$

folgt. ■

22.8 Anwendungen

Geburts– und Todesprozess mit konstanten Raten

Beim Geburts– und Todesprozess mit konstanten Raten gilt $\lambda_n = \lambda$ für $n = \mathbb{N}_0$ und $\mu_n = \mu$ für $n \in \mathbb{N}$. Das zugehörige System für die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten (22.22) lautet hier

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1, \\ 0 &= -(\lambda+\mu)\pi_n + \mu\pi_{n+1} + \lambda\pi_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Nach Division durch μ nimmt die zweite Gleichung die Form

$$\pi_{n+1} - (\varrho + 1)\pi_n + \varrho\pi_{n-1} = 0 \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

mit $\varrho := \frac{\lambda}{\mu}$ an. Offensichtlich handelt es sich hier um eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Anhang A). Die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$x^2 - (\varrho + 1)x + \varrho$$

sind $x_1 = 1$ und $x_2 = \varrho$. Die konstante Funktion $\pi_n = 1$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ kann nicht zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung normiert werden und ist auch nicht mit der Anfangsbedingung

$$0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$$

kompatibel. Die gesuchte Lösung ist deshalb

$$\pi_n = c \cdot \varrho^n \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei allerdings $\varrho < 1$ zu fordern ist, da die Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sonst nicht summierbar ist. In diesem Fall ist

$$1 = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n = \frac{c}{1-\varrho} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 1 - \varrho.$$

Auf die Voraussetzung, dass Q regulär ist, kann in Satz 22.60 nicht verzichtet werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

22.61 Beispiel:
Betrachte einen verallgemeinerten Geburts– und Todesprozess mit den Übergangsintensitäten

$$\begin{aligned} q_{n,n+1} &= \lambda_n = 4^n \quad \text{für } n = 0,1,2,\dots \\ q_{n,n-1} &= \mu_n = \frac{4^n}{2} \quad \text{für } n = 1,2,\dots \end{aligned}$$

Zur Überprüfung auf Regularität verwenden wir Satz 22.50. Dieser liefert wegen

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \dots + \frac{\mu_n \cdot \ldots \cdot \mu_2}{\lambda_n \cdot \ldots \cdot \lambda_1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{\frac{4^n}{2}}{4^n \cdot 4^{n-1}} + \frac{4^n \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{2^2}}{4^n \cdot 4^{n-1} \cdot 4^{n-2}} + \dots + \frac{4^n \cdot \ldots \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}}{4^n \cdot \ldots \cdot 4^2 \cdot 4} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{4^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{4} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \left(2^0 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n < \infty, \end{aligned}$$

dass Q nicht regulär ist. Die zugehörigen stationären Gleichungen

$$\begin{aligned} & 0 = -(\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \mu_{n+1}\pi_{n+1} + \lambda_{n-1}\pi_{n-1} \qquad \text{für } n = 1,2,\dots \\ \iff \quad & 0 = -\left(4^n + \frac{4^n}{2}\right)\pi_n + \frac{4^{n+1}}{2}\pi_{n+1} + 4^{n-1}\pi_{n-1} \qquad \text{für } n = 1,2,\dots \\ \iff \quad & 0 = -(4+2)\pi_n + 8\pi_{n+1} + \pi_{n-1} \qquad \text{für } n = 1,2,\dots \end{aligned}$$

besitzen aber trotzdem eine nichtnegative Lösung, nämlich

$$\pi_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \qquad \text{für } n = 0,1,2,\dots,$$

die sich auch mit der Anfangsbedingung

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \iff \pi_0 = 2\pi_1 \iff \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4}$$

verträgt. Da aber die Geburtsraten größer als die Sterberaten sind, explodiert der Prozess und besitzt keine Grenzverteilung.

Ein Warteschlangenmodell für Telekommunikationssysteme

Bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat der dänische Ingenieur und Mathematiker A. K. Erlang ein stochastisches Modell für Bediensysteme ohne Warteraum entwickelt, das seitdem für die Beschreibung des Telefonverkehrs herangezogen wird. Anrufe fallen nach einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung an einer Vermittlungsstelle ein. Sie passieren die Stelle, wenn das abgehende Leitungsbündel frei ist, anderenfalls gehen sie ohne Nachwirkung auf das Netz verloren. Das Erlangsche Modell beschreibt den Telefonverkehr auf eine sehr vereinfachte Weise. Denn aus eigener Erfahrung weiß man, dass ein erfolgloser Anruf mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wiederholt wird und dass sowohl die Wiederholwahrscheinlichkeit als auch der Wiederholabstand von der Art des Misserfolgs abhängen. Um die Auswirkungen von Anrufwiederholungen auf ein Fernsprechsystem zu untersuchen, wird eine Verkehrsmodell definiert, das das Verhalten der Teilnehmer nach erfolglosen Anrufversuchen beschreibt.

Wir betrachten eine Vermittlungsstelle mit $s \geq 1$ Abnehmerleitungen und voller Erreichbarkeit, d.h. ein Anruf wird nur dann vom System blockiert, wenn alle s Abnehmerleitungen belegt sind. Die Einfallabstände der neuen Anrufe seien unabhängige, exponentiell verteilte Zufallsvariablen mit dem Parameter $\lambda > 0$. Ein Teilnehmer, der bei seiner Ankunft nicht sofort bedient werden kann, wiederholt seinen Anruf mit Wahrscheinlichkeit p_1, $0 < p_1 \leq 1$. Jeder weitere Anruf wird unabhängig von der Anzahl der vorangegangenen Versuche mit Wahrscheinlichkeit p_2, $0 < p_2 \leq 1$, wiederholt. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_1$ bzw. $1 - p_2$ gibt der Kunde auf. Die Abstände zwischen den einzelnen Wiederholungen eines Teilnehmers werden als unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen angenommen. Die Wiederholrate bezeichnen wir mit δ. Die aufeinanderfolgenden Belegdauern bilden eine Folge unabhängiger, exponentiell verteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\mu > 0$. (siehe Abb. 22.4)

Zur Beschreibung des Systems wählen wir den Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ mit $X_t = (L_t, Q_t), t \in \mathbb{R}^+$, wobei L_t die Anzahl der zur Zeit t belegten Leitungen und Q_t die Anzahl der zur Zeit t wartenden Teilnehmer bezeichne. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung definiert $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ einen homogenen Markovprozess mit Zustandsraum $E = \{0, 1, 2, \ldots, s\} \times \mathbb{N}_0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{(k,l)(m,n)}(t) = P(X_t = (m,n) \mid X_0 = (k,l)), \qquad (k,l), (m,n) \in E,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Der Einfachheit halber setzen wir $s = 1$ und $p_1 = p_2 = p$ und stellen zunächst die Q–Matrix auf:

$$\begin{array}{rcllcl}
q_{(0,n)(1,n)} &=& \lambda, & n &=& 0,1,2,\ldots\\
q_{(0,n)(1,n-1)} &=& n\delta, & n &=& 1,2,\ldots\\
q_{(0,n)(0,n)} &=& -(\lambda + n\delta), & n &=& 0,1,2,\ldots\\
q_{(1,n)(0,n)} &=& \mu, & n &=& 0,1,2,\ldots\\
q_{(1,n)(1,n+1)} &=& \lambda p, & n &=& 0,1,2,\ldots\\
q_{(1,n)(1,n-1)} &=& n\delta(1-p), & n &=& 1,2,\ldots\\
q_{(1,n)(1,n)} &=& -(\mu + \lambda p + n\delta(1-p)), & n &=& 0,1,2,\ldots.
\end{array}$$

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ stellt einen zweidimensionalen Competitionprozess dar. Mithilfe von Satz 22.52 kann man zeigen, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ regulär ist. Wir wollen nun

$$\pi_{(m,n)} := \lim_{t\to\infty} P_{(k,l)(m,n)}(t), \qquad (m,n), (k,l) \in E,$$

berechnen. Die zu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ gehörenden stationären Gleichungen (22.22) lauten

$$\begin{aligned}
0 &= -(\lambda + n\delta)\cdot\pi_{(0,n)} + \mu\cdot\pi_{(1,n)} \qquad \text{für } n = 0,1,2,\ldots\\
0 &= -\big(\lambda p + \mu + n\delta(1-p)\big)\cdot\pi_{(1,n)} + \lambda\cdot\pi_{(0,n)} + \lambda p\cdot\pi_{(1,n-1)} + (n+1)\delta\cdot\pi_{(0,n+1)}\\
&\quad + (n+1)\delta(1-p)\cdot\pi_{(1,n+1)} \qquad \text{für } n = 0,1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

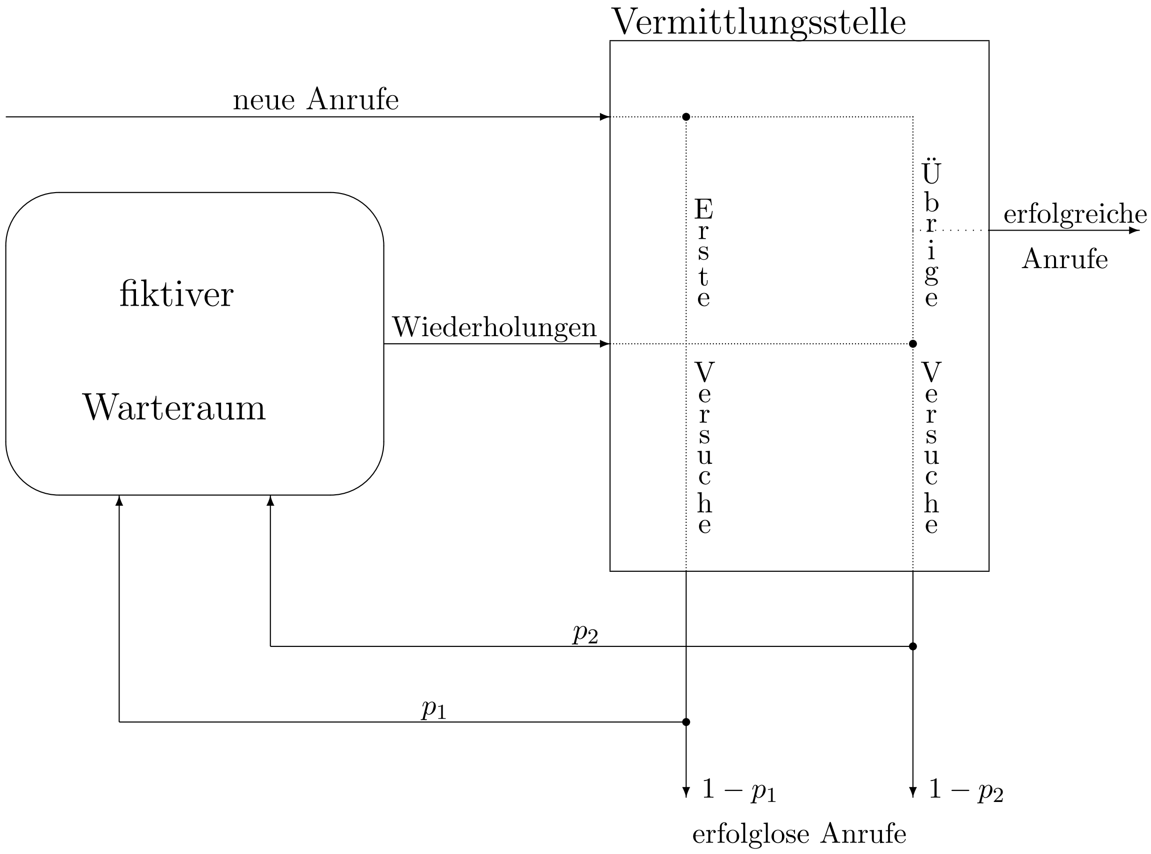


Abbildung 22.4: Verkehrsmodell für Anrufwiederholungen

wobei $\pi_{(1,-1)} := 0$ vereinbart wird. Zur weiteren Behandlung dieses Differenzengleichungssystems führen wir die erzeugenden Funktionen

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{(0,n)} z^n, \quad |z| \leq 1,$$
$$G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{(1,n)} z^n, \quad |z| \leq 1,$$

ein. Multiplikation der stationären Gleichungen mit z^n und anschließendes Aufsummieren liefert

$$0 = -\lambda G_0(z) - \delta z G_0'(z) + \mu G_1(z), \tag{22.23}$$
$$0 = -(\lambda p + \mu) \cdot G_1(z) - \delta(1-p) \cdot z G_1'(z) + \lambda \cdot G_0(z) + \lambda p \cdot z G_1(z) + \delta \cdot G_0'(z)$$
$$+ \delta(1-p) \cdot G_1'(z).$$

Addiert man diese Gleichungen, erhält man

$$\delta(1-p)(1-z)\cdot G_1'(z)+\delta(1-z)\cdot G_0'(z)-\lambda p(1-z)\cdot G_1(z)=0$$

bzw.

$$\delta(1-p)\cdot G_1'(z)+\delta\cdot G_0'(z)-\lambda p\cdot G_1(z)=0. \tag{22.24}$$

Um das Differentialgleichungssystem (22.23) – (22.24) zu lösen, verfolgen wir zunächst die Separation der Variablen. Aus (22.23) folgt sukzessive

$$\begin{aligned}\mu G_1(z)&=\delta z G_0'(z)+\lambda G_0(z) \qquad \text{bzw.}\\ \mu G_1'(z)&=\delta z G_0''(z)+(\lambda+\delta)G_0'(z)\end{aligned}$$

Indem wir diese Ausdrücke in (22.24) einsetzen, bekommen wir:

$$\begin{aligned}&\delta(1-p)\mu\cdot G_1'(z)+\delta\mu\cdot G_0'(z)-\lambda p\mu\cdot G_1(z)=0\\ \iff\quad &\delta(1-p)\cdot\Big(\delta z G_0''(z)+(\lambda+\delta)G_0'(z)\Big)+\delta\mu\cdot G_0'(z)-\lambda p\Big(\delta z G_0'(z)+\lambda G_0(z)\Big)=0\\ \iff\quad &\delta^2(1-p)z\cdot G_0''(z)+\Big(\delta(1-p)(\lambda+\delta)+\delta\mu-\lambda p\delta z\Big)\cdot G_0'(z)-\lambda^2 p\cdot G_0(z)=0\\ \iff\quad &zG_0''(z)+\left(\frac{\lambda}{\delta}+1+\frac{\mu}{\delta(1-p)}-\frac{\lambda p}{\delta(1-p)}z\right)\cdot G_0'(z)-\frac{\lambda^2 p}{\delta^2(1-p)}G_0(z)=0.\end{aligned} \tag{22.25}$$

Zur weiteren Behandlung dieser Differentialgleichung führen wir die Transformation

$$z=z(x)=\frac{\delta(1-p)}{\lambda\cdot p}\cdot x \tag{22.26}$$

durch und setzen

$$F_0(x):=G_0\big(z(x)\big).$$

Unter Berücksichtigung der Kettenregel

$$\Big(G_0\big(z(x)\big)\Big)'=G_0'(z)\cdot z'(x)$$

ergibt sich

$$G_0(z)=F_0(x),\qquad G_0'(z)=\frac{\lambda p}{\delta(1-p)}F_0'(x),\qquad G_0''(z)=\frac{\lambda^2p^2}{\delta^2(1-p)^2}F_0''(x).$$

Wenden wir die Transformation (22.26) auf die Gleichung (22.25) an, bekommen wir

$$\begin{aligned}&\frac{\delta(1-p)}{\lambda\cdot p}\cdot x\cdot\frac{(\lambda p)^2}{\delta^2(1-p)^2}\cdot F_0''(x)\\ &+\left(\frac{\lambda}{\delta}+\frac{\mu}{\delta(1-p)}+1-\frac{\lambda\cdot p}{\delta(1-p)}\cdot\frac{\delta(1-p)}{\lambda\cdot p}\cdot x\right)\cdot\frac{\lambda\cdot p}{\delta(1-p)}\cdot F_0'(x)\\ &-\frac{\lambda^2 p}{\delta^2(1-p)}\cdot F_0(x)=0\\ \iff\quad &\frac{\lambda\cdot p}{\delta(1-p)}\cdot x\cdot F_0''(x)+\left(\frac{\lambda}{\delta}+\frac{\mu}{\delta(1-p)}+1-x\right)\cdot\frac{\lambda\cdot p}{\delta(1-p)}\cdot F_0'(x)\\ &-\frac{\lambda^2 p}{\delta^2(1-p)}\cdot F_0(x)=0\\ \iff\quad &x\cdot F_0''(x)+\left(\frac{\lambda}{\delta}+\frac{\mu}{\delta(1-p)}+1-x\right)\cdot F_0'(x)-\frac{\lambda}{\delta}\cdot F_0(x)=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vom Typ der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$xy'' + (b-x)y' - ay = 0, \qquad x \in \mathbb{C}$$

für die die Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cdot \Phi(a,b,x), \qquad x \in \mathbb{C}, \\ y_2 &= c_2 \cdot x^{-b+1} \cdot \Phi(1+a-b, 2-b, x), \qquad x \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem bilden, wobei Φ die sogenannte konfluente hypergeometrische Funktion bezeichnet:

$$\Phi(a,b,x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+k-1)} \cdot \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{C}. \tag{22.27}$$

Aufgrund des Quotientenkriteriums konvergiert die konfluente hypergeometrische Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$, denn es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+k)} \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+k-1)} \cdot \frac{x^k}{k!}} = \frac{a+k}{b+k} \cdot \frac{x}{k+1} < 1 \quad \text{für fast alle } k.$$

Im vorliegenden Fall ist

$$a = \frac{\lambda}{\delta} \qquad \text{und} \qquad b = \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1.$$

y_2 scheidet als Lösung des Problems aus, weil sie wegen $b-1>0$ keine wahrscheinlichkeits–erzeugende Funktion darstellt (y_2 hat an der Stelle 0 eine Polstelle). Die gesuchte Lösung ist folglich

$$F_0(x) = c_1 \cdot \Phi\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, x\right), \qquad x \in \mathbb{C},$$

bzw. wenn wir zurücktransformieren

$$G_0(z) = c_1 \cdot \Phi\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)} \cdot z\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Eine entsprechende Rechnung für $G_1(z)$ führt zu

$$G_1(z) = c_2 \cdot \Phi\left(\frac{\lambda}{\delta} + 1, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)} \cdot z\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 haben eine anschauliche Bedeutung, es ist

$$c_1 = \pi_{(0,0)} \qquad \text{und} \qquad c_2 = \pi_{(1,0)}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$0 = -(\lambda + n\delta)\pi_{(0,n)} + \mu\pi_{(1,n)} \qquad \text{für } n = 0,1,2,\ldots$$

erhalten wir

$$\pi_{(1,0)} = \frac{\lambda}{\mu}\pi_{(0,0)} \qquad \text{bzw.} \qquad c_2 = \frac{\lambda}{\mu}c_1.$$

Aus

$$G_0(1) + G_1(1) = 1$$

folgt

$$c_1 \cdot \left[\Phi\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)}\right) + \frac{\lambda}{\mu}\Phi\left(\frac{\lambda}{\delta} + 1, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)}\right)\right] = 1$$

bzw.

$$c_1 = \left[\Phi\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)}\right) + \frac{\lambda}{\mu}\Phi\left(\frac{\lambda}{\delta} + 1, \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1, \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)}\right)\right]^{-1}.$$

Die Einzelwahrscheinlichkeiten ergeben sich unmittelbar aus (22.27):

$$\begin{aligned}
\pi_{(0,n)} &= c_1 \cdot \frac{\frac{\lambda}{\delta} \cdot \left(\frac{\lambda}{\delta} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda}{\delta} + n - 1\right)}{\left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + n\right)} \cdot \frac{(\lambda \cdot p)^n}{\delta^n (1-p)^n \cdot n!} \\
&\quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \\
\pi_{(1,n)} &= c_1 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\frac{\lambda}{\delta} \cdot \left(\frac{\lambda}{\delta} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda}{\delta} + n\right)}{\left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda}{\delta} + \frac{\mu}{\delta(1-p)} + n\right)} \cdot \frac{(\lambda \cdot p)^n}{\delta^n (1-p)^n \cdot n!} \\
&\quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Insbesondere besitzen die stationären Gleichungen für $p < 1$ eine positive summierbare Lösung, d.h. alle Zustände sind positiv rekurrent.

Wir wollen nun noch die mittlere Anzahl wartender Teilnehmer

$$\mathbf{E}[Q] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\pi_{(0,n)} + \pi_{(1,n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \pi_{(0,n)} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \pi_{(1,n)} = G_0'(1) + G_1'(1)$$

berechnen. Dazu können wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mu G_1(z) &= \delta z \cdot G_0'(z) + \lambda \cdot G_0(z) \\
0 &= \delta(1-p) \cdot G_1'(z) + \delta \cdot G_0'(z) - \lambda p \cdot G_1(z)
\end{aligned}$$

heranziehen. Die erste Gleichung führt zu

$$G_0'(1) = \frac{\mu}{\delta} \cdot G_1(1) - \frac{\lambda}{\delta} \cdot G_0(1),$$

die zweite liefert

$$\begin{aligned}
G_1'(1) &= \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)} \cdot G_1(1) - \frac{1}{1-p} \cdot G_0'(1) \\
&= \frac{\lambda \cdot p}{\delta(1-p)} \cdot G_1(1) - \frac{1}{1-p}\frac{\mu}{\delta} \cdot G_1(1) + \frac{1}{1-p}\frac{\lambda}{\delta} \cdot G_0(1) \\
&= \frac{\lambda p - \mu}{\delta(1-p)} \cdot G_1(1) + \frac{\lambda}{\delta(1-p)} \cdot G_0(1).
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Q] &= G_0'(1) + G_1'(1) = \frac{\mu}{\delta} \cdot G_1(1) - \frac{\lambda}{\delta} \cdot G_0(1) + \frac{\lambda p - \mu}{\delta(1-p)} \cdot G_1(1) + \frac{\lambda}{\delta(1-p)} \cdot G_0(1) \\ &= \frac{(\lambda - \mu)p}{\delta(1-p)} \cdot G_1(1) + \frac{\lambda p}{\delta(1-p)} \cdot G_0(1).\end{aligned}$$

22.9 Transienz– und Rekurrenzkriterien

Die Rekurrenz– und Transienzkriterien für Markovprozesse ergeben sich im Wesentlichen aus den Kriterien für Markovketten in diskreter Zeit. Zentral dabei ist der nachstehende Zusammenhang.

22.62 Satz:
Es sei Q konservativ, regulär und irreduzibel. Genau dann ist $i \in E$ für den durch Q eindeutig definierten Q–Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ rekurrent, wenn i in der durch die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad j = i \\ \frac{q_{ij}}{q_i} & , \quad j \neq i \end{cases}$$

definierten diskreten Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrent ist.

Beweis:
Nach Satz 22.26 ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gerade die Sprungkette von $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, d.h. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ haben das gleiche Pfadverhalten ($(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ignoriert lediglich die Verweildauern). Kehrt die in i startende Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 nach i zurück, so gilt das auch für den Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ und umgekehrt. ■

Damit lassen sich nun die Kriterien aus der Theorie der diskreten Markovketten direkt übertragen.

22.63 Satz:
Es sei Q konservativ, regulär und irreduzibel.

a) Gibt es ein $i_0 \in E$ derart, dass das Gleichungssystem

$$\sum_{j\in E\setminus\{i_0\}} q_{ij} h_j = 0, \quad 0 \le h_j \le 1 \quad (i \neq i_0)$$

nur die triviale Lösung $h \equiv 0$ besitzt, so ist E rekurrent.

b) Gibt es ein $i_0 \in E$ derart, dass das Gleichungssystem

$$\sum_{j\in E\setminus\{i_0\}} q_{ij} h_j = 0, \quad 0 \le h_j \le 1 \quad (i \neq i_0)$$

eine Lösung $h \not\equiv 0$ besitzt, so ist E transient.

c) *Genau dann ist E transient, wenn es ein solches $i_0 \in E$ gibt, dass das Gleichungssystem*

$$\sum_{j\in E} q_{ij}h_j = 0 \quad (i \neq i_0)$$

eine nichtkonstante beschränkte Lösung hat.

d) *Sei $E = \mathbb{N}_0$. Gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}_0$ und h mit $h_i \to \infty$ für $i \to \infty$ und*

$$\sum_{j\in \mathbb{N}_0} q_{ij}h_j \leq 0 \quad (i \neq i_0),$$

so ist $\mathbb{N}_0$ rekurrent.

Beweis:
Der Satz beruht auf den diskreten Kriterien aus den Sätzen 21.43, 21.45 und 21.46. Dort wurden Systeme der Form

$$h_i \overset{(\geq)}{=} \sum_{j\in E'} P_{ij}h_j, \quad i \neq i_0$$

mit $E' = E \setminus \{i_0\}$ oder $E' = E$ betrachtet. Einsetzen der Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Sprungkette liefert

$$q_ih_i \overset{(\geq)}{=} \sum_{j\in E'\setminus\{i\}} q_{ij}h_j, \quad i \neq i_0$$

und wegen $q_i = -q_{ii}$ folgt

$$0 \overset{(\geq)}{=} \sum_{j\in E'} q_{ij}h_j, \quad i \neq i_0.$$

Damit sind die Rekurrenz– und Transienzaussagen für die eingebettete Sprungkette bereits gezeigt und mit Satz 22.62 folgen die Behauptungen. ■

Ein wichtiges Kriterium für positive Rekurrenz wurde bereits in Satz 22.60 angegeben. Für Q konservativ, regulär und irreduzibel liegt genau dann positive Rekurrenz vor, wenn das System der stationären Gleichungen $yQ = 0$ eine strikt positive und summierbare Lösung besitzt. Es kann nun noch eine Beziehung zwischen den stationären Maßen des Markovprozesses und seiner eingebetteten Markovkette gezeigt werden.

22.64 Satz:
Es sei Q konservativ, regulär und irreduzibel und die eingebettete Sprungkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei wie üblich durch

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad j = i \\ \frac{q_{ij}}{q_i} & , \quad j \neq i \end{cases}$$

definiert. Für $u = (u_k)_{k\in E}$ und $y = (y_k)_{k\in E}$ möge die Beziehung $y_k = \frac{u_k}{q_k}$ für alle $k \in E$ gelten. Genau dann ist u ein stationäres Maß für die eingebettete Sprungkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also

$$\sum_{k\in E} u_kP_{kj} = u_j \quad (j \in E),$$

wenn y die stationären Gleichungen für Q, also $yQ = 0$ löst.

Beweis:
Betrachte das Gleichungssystem $uP = u$ bzw. $u(P-I) = 0$. Die Matrix $P-I$ besteht im Fall der eingebetteten Markovkette aus den Einträgen

$$P_{ij} - \delta_{ij} = \begin{cases} -1 = \frac{q_{ii}}{q_i} &, \quad j = i \\ \frac{q_{ij}}{q_i} &, \quad j \neq i. \end{cases}$$

u ist genau dann Lösung von $u(P-I) = 0$, wenn für alle $j \in E$

$$\sum_{k \in E} u_k \frac{q_{kj}}{q_k} = 0$$

gilt. Dies ist wegen $y_k = \frac{u_k}{q_k}$ genau dann der Fall, wenn $yQ = 0$ besteht. Ist u strikt positiv, so ist auch y strikt positiv. ■

22.65 Bemerkung:
Satz 22.64 gibt nur eine Beziehung zwischen den stationären Maßen für den Markovprozess und seine eingebettete Sprungkette an; die gegebenenfalls vorliegende strikte Positivität bleibt dabei erhalten. Allerdings ist dadurch nicht gezeigt, dass der Begriff der positiven Rekurrenz für den Markovprozess und seine eingebettete Sprungkette zusammenfallen – diese Ausssage ist im Allgemeinen sogar falsch. Wegen der Beziehung $y_k = \frac{u_k}{q_k}$ folgt aus der Summierbarkeit der y_k nicht die der u_k und auch die umgekehrte Schlussweise ist nicht möglich.

22.10 Ergodensätze

Ergodensätze für Markovprozesse in stetiger Zeit können auf dieselbe Weise bewiesen werden wie solche für Markovketten in diskreter Zeit. Zentral ist dabei wieder eine Aussage über die mittlere Zeit, die der Prozess während eines Zyklus von i nach i im Zustand j verbringt.

22.66 Satz:
Es sei Q konservativ, regulär, irreduzibel und positiv rekurrent mit zugehöriger stationärer Verteilung π. Dann gilt mit $T = T_{ii}^{(1)}$ (erster Rückkehrzeitpunkt)

$$M(i,j) = E\left[\int_0^T 1_{\{j\}}(X_s)ds \middle| X_0 = i \right] = \frac{\pi_j}{q_i \pi_i}.$$

Beweis:
$M(i,j)$ berechnet sich als Produkt der mittleren Anzahl der Aufenthalte im Zustand j während eines Zyklus von i nach i und der mittleren Verweilzeit im Zustand j.
Die Verweilzeit im Zustand j ist exponentiell verteilt mit dem Parameter q_j, d.h. die mittlere Verweilzeit ist $\frac{1}{q_j}$, die mittlere Anzahl von Aufenthalten im Zustand j wurde im entsprechenden Satz aus der diskreten Theorie 21.52 mit $A(i,j)$ bezeichnet. Im Beweis wurde dort gezeigt, dass $A(i,j)$ für jedes feste i das stationäre Gleichungssystem $uP = u$ erfüllt. Nach Satz 22.64 erfüllt daher $M(i,j) = \frac{A(i,j)}{q_j}$ für jedes feste i das stationäre Gleichungssystem $yQ = 0$. Es folgt $M(i,j) = c_i \pi_j$ und wegen $M(i,i) = \frac{1}{q_i}$ die Behauptung. ■

Mit analogen Beweisen wie im Kapitel über Ergodensätze für diskrete Markovketten (lediglich die Summen sind durch Integrale zu ersetzen) folgt nun

22.67 Satz:
Es sei Q konservativ, regulär, irreduzibel und positiv rekurrent mit stationärer Verteilung π. Ferner seien $f, g : E \to \mathbb{R}$ Kostenfunktionen mit $\pi|f| < \infty$, $\pi|g| < \infty$ sowie $\pi f \neq 0$ oder $\pi g \neq 0$. Der erste Rückkehrzeitpunkt zum Zustand i wird mit $T = T_{ii}^{(1)}$ bezeichnet.

a) Für die mittleren Kosten in einem Zyklus gilt

$$E\left[\int_0^T f(X_s)ds \middle| X_0 = i\right] = \frac{\pi f}{q_i \pi_i} \qquad \textit{bzw.} \qquad \frac{E\left[\int_0^T f(X_s)ds \middle| X_0 = i\right]}{E\left[\int_0^T g(X_s)ds \middle| X_0 = i\right]} = \frac{\pi f}{\pi g}.$$

b) P–f.s. gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(X_s)ds}{\int_0^t g(X_s)ds} = \frac{\pi f}{\pi g} \qquad \textit{und} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds = \pi f.$$

c) Für die entsprechenden Erwartungswerte gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t f(X_s)ds \middle| X_0 = i\right]}{E\left[\int_0^t g(X_s)ds \middle| X_0 = i\right]} = \frac{\pi f}{\pi g} \qquad \textit{und} \qquad \lim_{t\to\infty} E\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds \middle| X_0 = i\right] = \pi f.$$

Literatur zu Kapitel 22

Folgende Bücher werden als begleitende Literatur zu diesem Kapitel des Skriptes empfohlen:

- S. I. Resnick:
  Adventures in Stochastic Processes,
  Birkhäuser, Boston, 1992.
  ISBN:0817635912

- K.L. Chung:
  Markov Chains with stationary transition probabilities,
  Springer–Verlag, 1960.

- J.L. Doob:
  Markoff chains – denumerable case,
  Trans. Amer. Math. Soc. 42, 107-140.

- E. Cinlar:
  Introduction to stochastic processes,
  Prentice–Hall, 1975.

- W.J. Anderson:
  Continuous–Time Markov Chains,
  Springer Verlag, Berlin, 1991.
  ISBN: 3540973699

- D. W. Stroock:
  An Introduction to Markov Processes,
  Springer-Verlag, Berlin, 2005.
  ISBN: 3540234993

Kapitel 23

Markovsche Erneuerungstheorie

In diesem Kapitel werden Markovsche Erneuerungsprozesse behandelt. Sie verallgemeinern sowohl Markov– als auch Erneuerungsprozesse; daher lassen sich sehr viele real existierende stochastische Prozesse als Markovsche Erneuerungsprozesse darstellen. Es werden zunächst die Markovsche Erneuerungsfunktion und die Markovsche Erneuerungsgleichung eingeführt, anschließend wird das Grenzverhalten Markovscher Erneuerungsprozesse analysiert. Zum Abschluss werden diese Ergebnisse auf verwandte Prozesse, nämlich Semi–Markov– und semiregenerative Prozesse angewendet.

Schlüsselwörter: Markovscher Erneuerungsprozess, Semi–Markov–Prozess, semiregenerativer Prozess, Markovsche Erneuerungsfunktion, Markovsche Erneuerungsgleichung, Grenzverhalten.

23.1 Markovsche Erneuerungsprozesse

Markovsche Erneuerungsprozesse verbinden die Eigenschaften von Erneuerungsprozessen und Markovprozessen miteinander. Letztere können in zwei Komponenten zerlegt werden – in eine diskrete Markovkette, d.h. eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (mit Werten in einer diskreten Menge E), bei der die Verteilung von X_{n+1} nur von X_n abhängt, und in eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verweildauern aus $\mathbb{R}^+$, die nur vom aktuellen Zustand abhängen und exponentiell verteilt sind.
Wird nun zugelassen, dass die Verweildauern beliebig verteilt sind und neben dem aktuellen Zustand auch vom Folgezustand abhängen dürfen, so entstehen Markovsche Erneuerungsprozesse bzw. Semi – Markovprozesse.

23.1 Definition:

a) *Es sei $(X,S) = ((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ ein Paar von stochastischen Prozessen, wobei die Werte von (X_n) in der diskreten Menge E und die von $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $T_n = S_n - S_{n-1}$ in $\mathbb{R}^+$ liegen ($S_0 := 0$). Gilt für alle $j, i, i_1, \ldots, i_{n-1} \in E$, $t, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} & P\left(X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n\right) \\ = \; & P\left(X_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | X_n = i\right) =: Q_{ij}(t), \end{aligned}$$

sowie

$$P(T_{n+1} = 0 | X_n = i) < 1$$

so heißt (X,S) (homogener) Markovscher Erneuerungsprozess und $Q(t) = \left(Q_{ij}(t)\right)_{i,j\in E}$ wird als Übergangskern von (X,S) bezeichnet.

b) *Es sei (X,S) ein Markovscher Erneuerungsprozess. Ein Zustand i aus dem Zustandsraum E heißt positiv rekurrent bzw. nullrekurrent bzw. transient, wenn i im Sinne der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent bzw. nullrekurrent bzw. transient ist.*

c) *Der Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, der durch*

$$Y_t = \sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{[S_n, S_{n+1})}(t), \quad t < \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n =: J$$

erklärt und im Fall $J < \infty$ durch den leeren Zustand $Y_t = \Delta \notin E$ für $t \geq J$ fortgesetzt wird, heißt der (minimale) Semi– Markovprozess zu (X,S).

d) *Es sei $(Z_t)_{t\geq 0}$ ein zeitstetiger Prozess über dem Maßraum $(A, \mathcal{A})$ sowie (X,S) ein Markovscher Erneuerungsprozess. Unterteilen die Zeitpunkte S_n den Prozess derart, dass*

$$\begin{aligned} & P(Z_{S_m+t_1} \in A_1, \ldots, Z_{S_m+t_k} \in A_k \mid X_m = i, \ \{Z_s, s \leq S_m\}) \\ = \; & P(Z_{S_m+t_1} \in A_1, \ldots, Z_{S_m+t_k} \in A_k \mid X_m = i) \\ = \; & P(Z_{t_1} \in A_1, \ldots, Z_{t_k} \in A_k \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

gilt (also die Zukunft des Prozesses zum Zeitpunkt S_m nur vom Zustand X_m abhängt), so heißt $(Z_t)_{t\geq 0}$ semiregenerativer Prozess.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erhält man einfach durch den Grenzübergang $t \to \infty$, also

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = Q_{ij}(\infty) := \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t).$$

Folglich gilt für die bedingten Verweildauern

$$P(T_{n+1} \leq t | X_n = i, X_{n+1} = j) = \frac{Q_{ij}(t)}{Q_{ij}(\infty)}$$

sowie für die unbedingten Verweildauern im Zustand i

$$P(T_{n+1} \leq t | X_n = i) = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t).$$

Die Bedingung $P(T_{n+1} = 0 | X_n = i) < 1$ kann daher auch als

$$\sum_{j \in E} Q_{ij}(0) < 1$$

beschrieben werden; sie entspricht der Bedingung $F(0) < 1$ aus der Erneuerungstheorie, die erforderlich war, um die Konvergenz der Erneuerungsfunktion zu sichern (vergleiche Stochastik II, Kapitel 17).

23.2 Bemerkung:
Im Gegensatz zu Erneuerungsprozessen kann in der Tat mit positiver Wahrscheinlichkeit $J < \infty$ sein. Wie bei Markovprozessen legen die Markovsprungkette und die Folge der Verweildauern den Prozess dann nur bis zum Explosionspunkt J eindeutig fest, die Wahl von $Y_t = \Delta$ für $t \geq J$ führt daher nur auf einen möglichen zeitstetigen Prozess, sodass der Zusatz „minimal" in der Definition der Semi–Markovprozesse berechtigt ist.
Einige wichtige stochastische Prozesse treten als Spezialfälle der Markovschen Erneuerungsprozesse bzw. Semi–Markovprozesse auf.

- Wählt man E mit nur einem Zustand, etwa $E = \{1\}$, so bilden die $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ einen einfachen Erneuerungsprozess mit $F(t) = Q_{11}(t)$.

- Wird $E = \{0, 1\}$ und

  $$Q_{ij}(t) = F_i(t), \quad i, j = 0, 1, \quad i \neq j, \quad t \geq 0$$

  gewählt, so ensteht der sogenante <u>alternierende Erneuerungsprozess</u>. Der Zustand 1 kann als „Bauteil in Betrieb" interpretiert werden, der Zustand 0 als „Bauteil in Reparatur". Die Funktionen $F_1(t)$ bzw. $F_0(t)$ geben dann die Verteilungen der Lebensdauer bzw. der Reparaturdauer an.

- Ignoriert man die Verweildauern durch die Festlegung $T_n = 0$, also

  $$Q_{ij}(t) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

  unabhängig von $t \geq 0$, so erhält man eine diskrete Markovkette.

- Unter der Voraussetzung, dass der Explosionspunkt J bei ∞ liegt, wird der Semi – Markovprozess zu (X, S) zu einem Markovprozess, indem die Verweilzeiten als exponentiell verteilt gewählt werden; ist $\hat{P}(i, j)$ die Übergangsfunktion der eingebetteten Markovkette, so ist $Q_{ij}(t) = \hat{P}(i, j)(1 - e^{-q_i t})$ zu setzen.

23.2 Markovsche Erneuerungsgleichung

Es sei (X, S) ein Markovscher Erneuerungsprozess mit Übergangskern $Q(t)$.
Nun werden die Eintrittszeiten in einen Zustand j mit $M_n^{(j)}$ bezeichnet, also $M_0^{(j)} := 0$ und $M_{n+1}^{(j)} = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > M_n^{(j)}, X_m = j\}$. Die bis dahin vergangene Zeit sei $S_n^{(j)}$, also $S_n^{(j)} = T_1 + \ldots + T_{M_n^{(j)}} = S_{M_n^{(j)}}$. Dann sind die Zeiten $S_{n+1}^{(j)} - S_n^{(j)}$ (für $n \geq 1$) unabhängig und identisch verteilt, für jedes $j \in E$ bilden die $\left(S_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ einen (je nach Startzustand) gegebenenfalls modifizierten Erneuerungsprozess.
Von Interesse ist wie in der Erneuerungstheorie die mittlere Anzahl $R_{ij}(t)$ von Erneuerungen dieses eingebetteten Erneuerungsprozesses, also die mittlere Anzahl von Eintritten in den Zustand j im Zeitraum $[0, t]$, ausgehend vom Startzustand i (in Analogie zur Theorie der Erneuerungsprozesse wird für den Fall $i = j$ die 0–te Erneuerung nicht mitgezählt). $R(t) = (R_{ij}(t))_{i,j\in E}$ wird als Markovscher Erneuerungskern bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} R(i; j, t) &= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{j\}}(X_n) 1_{[0,t]}(S_n) | X_0 = i\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[1_{\{j\}}(X_n) 1_{[0,t]}(S_n) | X_0 = i\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, S_n \leq t | X_0 = i) \end{aligned}$$

Wird $Q_{ij}^{n*}(t) = P(X_n = j, S_n \leq t \mid X_0 = i)$ gesetzt, so folgt zum einen

$$R_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}^{n*}(t)$$

und zum anderen

$$Q_{ij}^{(n+1)*}(t) = \sum_{k\in E} \int_0^t Q_{kj}^{n*}(t-s) dQ_{ik}(s).$$

für $n \geq 1$, $i, j \in E$, $t \geq 0$ und $Q^{1*} = Q$.
Die hier an Faltungen erinnernde Schreibweise verlangt eine allgemeinere Definition von Faltungen mit einem Übergangskern $Q(t)$. Dazu sei $\mathbb{B}$ die Menge aller in der ersten Komponente global und in der zweiten Komponente lokal beschränkten Funktionen $f : E \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, d.h. für jede beschränkte Menge $K \subseteq [0, \infty)$ gibt es eine Konstante C mit $f(i, t) \leq C$ für alle $i \in E$ und alle $t \in K$. Dann werden Faltungen von Q mit $f \in \mathbb{B}$ durch

$$(Q * f)(i, t) = \sum_{j\in E} \int_0^t f(j, t-s) dQ_{ij}(s)$$

definiert. Wegen $Q_{\cdot k} \in \mathbb{B}$ (Wertebereich ist $[0, 1]$) für jedes k ist obige Schreibweise Q^{n*} legitim.

23.3 Bemerkung:
Es sei $F_{ij}(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der in i startende Erneuerungsprozess bis zum Zeitpunkt t den Zustand j erreicht hat. Aus dem Kapitel über modifizierte Erneuerungsprozesse

(Stochastik II) ist bekannt, dass dann

$$R_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_{ij} * F_{jj}^{(n-1)*} \right)(t)$$

besteht. Ist j rekurrent, so handelt es sich tatsächlich um einen modifzierten Erneuerungsprozess, insbesondere gilt

$$\lim_{t\to\infty} R_{ij}(t) = \infty.$$

Ist j jedoch transient, so ist F_{jj} keine Verteilungsfunktion, da $F_{jj}^* := \lim_{t\to\infty} F_{jj}(t) < 1$ ist. Es folgt dann nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{t\to\infty} R_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) \cdot \lim_{t\to\infty} F_{jj}^{(n-1)}(t) = F_{ij}^* \sum_{n=1}^{\infty} F_{jj}^{(n-1)} = \frac{F_{ij}^*}{1 - F_{jj}^*} < \infty.$$

Man spricht von einem abbrechenden Erneuerungsprozess.

Eine wichtige Hilfe zur Behandlung des Grenzverhaltens von Markovschen Erneuerungsprozessen ist wie in der Erneuerungstheorie die Kenntnis des Lösungverhaltens von Gleichungen der Form $h = g + Q * h$. Den Grundstein für die Theorie dieser sogenannten Markovschen Erneuerungsgleichungen bildet

23.4 Lemma:
Es gilt $R = Q + Q * R$.

Beweis:
Die kompakte Konvergenz von $R(i; j, t)$ für alle $i, j \in E$ (Erneuerungsfunktion eines Erneuerungsprozesses) und der Satz von der majorisierten Konvergenz erlauben die Vertauschung von Summation und Faltungsintegral in

$$Q + Q * R = Q + Q * \sum_{n=1}^{\infty} Q^{n*} = Q + \sum_{n=1}^{\infty} Q^{(n+1)*} = \sum_{n=1}^{\infty} Q^{n*} = R.$$

Der erste große Unterschied zur ursprünglichen Erneuerungstheorie besteht darin, dass die Lösungen von Markovschen Erneuerungsgleichungen nicht eindeutig sein müssen. Ohne weitere Voraussetzungen gilt nur

23.5 Lemma:
Es sei

$$h = g + Q * h \tag{23.1}$$

mit einer Funktion $g \in \mathbb{B}_+ := \{f \in \mathbb{B} \mid f \geq 0\}$ und einem Markovschen Übergangskern Q. Dann hat jede Lösung $h \in \mathbb{B}_+$ die Form

$$h = g + R * g + d,$$

wobei $d \in \mathbb{B}_+$ die Faltungsgleichung

$$d = Q * d$$

erfüllt.

Beweis:
Iteration von (23.1) führt auf

$$h = g + Q * g + Q^{2*} * g + \ldots + Q^{n*} * g + Q^{(n+1)*} * h$$

für ale $n \in \mathbb{N}$. Da $g \geq 0$ vorausgesetzt war, konvergiert die rechte Seite gegen $g + R * g$, wenn man vom letzten Summanden absieht. Dieser konvergiert gegen eine Funktion $d \in \mathbb{B}_+$, für die

$$d = \lim_{n\to\infty} Q^{(n+1)*} * h = Q * \lim_{n\to\infty} Q^{n*} * h = Q * d$$

gilt. ■

Die Lösung $g + R * g$ ist also eine minimale Lösung. Eindeutig ist sie genau dann, wenn $d = Q * d$ in $\mathbb{B}_+$ nur die triviale Lösung besitzt. Das nachstehende Lemma vereinfacht die Suche nach derartigen Funktionen d etwas.

23.6 Lemma:
Existiert eine von 0 *verschiedene Lösung* $d \in \mathbb{B}_+$ *von* $d = Q * d$*, so existiert auch eine Lösung* $d' \in \mathbb{B}_+$ *mit* $0 \neq d' \leq 1$.

Beweis:
Sei $d = Q * d$ mit $d \neq 0$. Dann existiert ein $b > 0$, so dass es ein $i \in E$ und ein $t < b$ mit $d(i,t) > 0$ gibt; somit ist

$$\beta := \sup\{d(i,t); i \in E, t \leq b\} > 0.$$

Definiere nun zunächst die Funktion $k \in \mathbb{B}_+$ mit $k \leq 1$ durch

$$k(i,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d(i,t)}{\beta}, & t < b, \\ 1, & t \geq b \end{array} \right\} \leq 1.$$

Dann gilt für $t < b$ sofort $k = Q * k$ und für $t \geq b$ noch

$$(Q * k)(i,t) \leq \sum_{j\in E} Q_{ij}(t) \leq 1 = k(i,t).$$

Zusammen folgt also $k \geq Q * k$ und somit die Ungleichungskette

$$1 \geq k \geq Q * k \geq Q^{2*} * k \geq \ldots \geq \lim_{n\to\infty} Q^{n*} * k =: d'.$$

Offensichtlich ist nun $d' \in \mathbb{B}_+$, $d' \leq 1$ und wegen der Monotonie der Konvergenz ist

$$d' = \lim_{n\to\infty} Q^{(n+1)*} * k = Q * \lim_{n\to\infty} Q^{n*} * k = Q * d'.$$

Für $t < b$ gilt wegen $k = Q * k$ auch $d' = k$ und daher ist d' nicht die Nullfunktion. ■

Damit lässt sich nun das nachstehende Ergebnis zeigen, dass das wichtigste Kriterium zur eindeutigen Lösbarkeit der Markovschen Erneuerungsgleichung bildet.

23.7 Lemma:
Genau dann ist die Markovsche Erneuerungsgleichung (23.1) in $\mathbb{B}_+$ eindeutig lösbar, wenn $J = \sup S_n = \infty$ P–f.s.

Beweis:
Es bezeichne

$$f_n(i;t) = P(S_n \le t \mid X_0 = i) = \sum_{j \in E} Q_{ij}^{n*}(t).$$

Wegen $S_0 \le S_1 \le \dots$ fällt f_n monoton für $n \to \infty$ und der Grenzwert ist

$$f(i;t) := \lim_{n \to \infty} P(S_n \le t \mid X_0 = i) = P(J \le t \mid X_0 = i).$$

Wegen $f_{n+1} = Q * f_n$ folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$f = Q * f.$$

Ist 0 die einzige Lösung von $d = Q * d$, so folgt $f = 0$, also $P(J \le t) = 0$ für jedes endliche $t \in \mathbb{R}^+$, d.h. $J = \infty$ P–f.s.
Sei nun umgekehrt $J = \infty$ P–f.s. gegeben, so folgt $f = 0$. Für jede weitere Lösung d von $d = Q * d$ mit $0 \le d \le 1$ gilt jedoch

$$d = Q * d = Q^{n*} * d \le Q^{n*} * 1 = f_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit auch $d \le f = 0$. Nach Lemma 23.6 folgt damit, dass $d = 0$ auch die einzige Lösung aus $\mathbb{B}_+$ von $d = Q * d$ ist. Nach Lemma 23.5 ist dies äquivalent zur eindeutigen Lösbarkeit der Markovschen Erneuerungsgleichung. ■

Ein einfaches hinreichendes Kriterium für die eindeutige Lösbarkeit bildet

23.8 Satz:
Es sei Q der Übergangskern eines Markovschen Erneuerungsprozesses über dem Zustandsraum E, der ausschließlich rekurrente Zustände enthält. Dann besitzt die Markovsche Erneuerungsgleichung $h = g + Q * h$ für jedes $g \in \mathbb{B}_+$ nur eine Lösung $h \in \mathbb{B}_+$, nämlich $h = g + R * g$.

Beweis:
Betrachte den Erneuerungsprozess $R_{jj}(t)$. Da j rekurrent ist, handelt es sich um einen nicht–abbrechenden Erneuerungsprozess. Insbesondere divergiert $R_{jj}(t)$ und somit wachsen auch die Erneuerungszeitpunkte $S_n^{(j)}$ über alle Schranken. Da sie aber eine Teilfolgen von $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ darstellen, folgt $J = \sup S_n = \infty$ und mit den Lemmata 23.5 und 23.7 die eindeutige Lösbarkeit der Markovschen Erneuerungsgleichung. Auf die Voraussetzung, dass alle Zustände rekurrent sind, kann nicht verzichtet werden, da ein rekurrenter Zustand mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht werden muss. ■

23.3 Das Markovsche Erneuerungstheorem

Ziel dieses Abschnittes ist eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Erneuerungstheorie, also eine Aussage über Faltungen $R * g$ mit dem Markovschen Erneuerungskern $R(t)$ und g aus einer geeigneten Funktionenklasse. Um Entartungen des mit der Erneuerungsfunktion $R_{ij}(t)$ assoziierten Erneuerungsprozesses zu verhindern, fordern wir, dass der Zustandsraum E irreduzibel rekurrent ist. Dann sind die Funktionen $F_{ij}(t)$ aus Bemerkung 23.3 echte Verteilungsfunktionen.
Wie im Kapitel über Markovketten gezeigt, existiert für einen irreduzibel rekurrenten Zustandsraum E ein stationäres Maß der eingebetteten Markovkette, d.h. eine Folge $(\pi_i)_{i\in E}$ mit

$$\sum_{j\in E} \pi_i Q_{ij}(\infty) = \pi_j;$$

im Fall positiver Rekurrenz gilt $\pi_j > 0$ und die Folge kann normiert werden, so dass

$$\sum_{j\in E} \pi_j = 1$$

gilt.
Auf den eingebetteten Erneuerungsprozess sollen nun das Blackwell'sche Erneuerungstheorem bzw. der Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie angewendet werden. In beiden kommt dabei der Erwartungswert der Zeitdifferenz der Erneuerungspunkte, also der Dauer eines Zyklus von i nach i, vor. Das nachstehende Lemma gibt an, wie diese anhand der Grenzverteilung berechnet werden kann.

23.9 Satz:
Es sei (X, S) ein Markovscher Erneuerungsprozess über dem irreduzibel rekurrenten Zustandsraum E; die eingebettete Markovkette (X_n) möge die stationäre Verteilung $(\pi_i)_{i\in E}$ besitzen. Mit

$$\mu_i := E[T_1 | X_0 = i] = \int\limits_0^\infty \left(1 - \sum_{j\in E} Q_{ij}(t)\right) dt$$

gilt

$$\nu_i := E\left[S_1^{(i)} | X_0 = i\right] = \frac{\sum\limits_{j\in E} \mu_j \pi_j}{\pi_i}.$$

Im null–rekurrenten Fall ist $\nu_i = \infty$.

Beweis:
Es seien $E_i := E \setminus \{i\}$,

$$\mu_{jk} := E[T_{n+1} | X_n = j, X_{n+1} = k]$$

sowie $N = \inf\{n \geq 1; X_n = i\} = M_1^{(i)}$. Es soll nun eine Darstellung der Form

$$\nu_i = \sum_{j\in E} \sum_{k\in E} a_{jk} \mu_{jk}$$

gefunden werden, d.h. a_{jk} ist die erwartete Anzahl von Übergängen von j nach k während eines Zyklus von i nach i.

Betrachte zunächst a_{ik} für $k \in E$. Ein Sprung von i nach k kann während eines Zyklus von i nach i nur einmal auftreten, die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $Q_{ik}(\infty)$. Vom Zustand k kehrt der Prozess wegen der Voraussetzung, dass E irreduzibel rekurrent ist, mit Wahrscheinlichkeit 1 in den Zustand i zurück. Für alle $k \in E$ ist daher

$$a_{ik} = Q_{ik}(\infty).$$

Seien nun $j, k \in E_i$. Das Problem bei der Bestimmung von a_{jk} besteht nun darin, dass der Sprung von j nach k in einem Zyklus von i nach i gegebenenfalls mehrfach auftritt. Es ist also über die Anzahl $r+1$ aller Sprünge während eines Zyklus von i nach i und die Nummer $n+1$ des Sprungs zu summieren, bei dem der Übergang von j nach k stattfinden soll. Da $j, k \neq i$ vorausgesetzt ist, gilt $r \geq 2$ und es ergibt sich unter Ausnutzung der Markoveigenschaft

$$\begin{aligned}
a_{jk} &= \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{r-1} P(X_n = j, N > n \mid X_0 = i) Q_{jk}(\infty) P(N = (r+1) - (n+1) \mid X_0 = k) \\
&= Q_{jk}(\infty) \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, N > n \mid X_0 = i) \sum_{r=n+1}^{\infty} P(N = r - n \mid X_0 = k) \\
&= Q_{jk}(\infty) A(i,j) \sum_{r=1}^{\infty} P(N = r \mid X_0 = k).
\end{aligned}$$

Die letzte Summe gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der in k startende Prozess irgendwann i erreicht. Aufgrund der Irreduzibilität und Rekurrenz von E hat sie den Wert 1, es wird

$$a_{jk} = Q_{jk}(\infty) A(i,j).$$

Dieses Ergebnis ist auch für $k = i$ gültig, da für $j \in E_i$ offensichtlich

$$a_{ji} = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, N > n \mid X_0 = i) Q_{ji}(\infty)$$

ist. Die Summe

$$A(i,j) := \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, N > n | X_0 = i)$$

gibt genau die erwartete Anzahl von Aufenthalten in j während eines Zyklus von i nach i an; in Satz 21.52 wurde gezeigt, dass sie sich durch $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ berechnet. Damit folgt insgesamt

$$\nu_i = \sum_{k \in E} Q_{ik}(\infty) \mu_{ik} + \sum_{j \in E_i} \sum_{k \in E} \frac{\pi_j}{\pi_i} Q_{jk}(\infty) \mu_{jk} = \sum_{j,k \in E} \frac{\pi_j}{\pi_i} Q_{jk}(\infty) \mu_{jk}.$$

Unter Beachtung von

$$\sum_{k \in E} Q_{jk}(\infty) \mu_{jk} = \sum_{k \in E} E[T_1 | X_0 = j, X_1 = k] P(X_1 = k \mid X_0 = j) = E[T_1 | X_0 = j] = \mu_j$$

wird

$$\nu_i = \sum_{j \in E} \frac{\pi_j}{\pi_i} \mu_j.$$

Damit folgt für feste $h > 0$, $i, j \in E$ direkt in Verallgemeinerung des Blackwell'schen Erneuerungstheorems

$$\lim_{t\to\infty} (R_{ij}(t+h) - R_{ij}(t)) = \frac{h}{\nu_j} = \frac{h \cdot \pi_j}{\sum_{k\in E} \pi_k \mu_k}.$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es allerdings, den Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie zu verallgemeinern, d.h. eine Aussage der Form

$$\lim_{t\to\infty} (R * g)(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{j\in E} \int_0^t g(j, t-s) dR_{ij}(s) = \int_0^\infty \sum_{j\in E} \frac{g(j,s)}{\nu_j} ds$$

für g aus einer geeigneten Funktionenklasse zu zeigen. Es wäre naheliegend zu verlangen, dass $g(j, \cdot)$ für alle $j \in E$ direkt Riemann–integrierbar ist. Dann müssten allerdings, um den Fundamentalsatz anwenden zu können, Grenzwert und Summe vertauscht werden. Dies ist nur für endliches E einfach möglich. Um das Markovsche Erneuerungstheorem auch für unendliche Zustandsräume formulieren zu können, wird der Begriff der direkten Riemann – Integrierbarkeit etwas verallgemeinert.

23.10 Definition:
Es sei $(\psi_i)_{i\in E}$ ein positives Maß auf E und $g \in \mathbb{B}_+$. Konvergieren die Reihen

$$\overline{\sigma}(\delta) = \delta \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{j\in E} \psi_j \sup_{t\in I_n^\delta} g(j,t) \qquad \text{und} \qquad \underline{\sigma}(\delta) = \delta \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{j\in E} \psi_j \inf_{t\in I_n^\delta} g(j,t)$$

mit $I_n^\delta = [n\delta, (n+1)\delta)$ für alle $\delta > 0$ und strebt ihre Differenz für $\delta \to 0+$ gegen 0, so heißt g direkt Riemann–integrierbar bezüglich $(\psi_i)_{i\in E}$.

Im nachstehenden Satz werden einige Ergebnisse zur direkten Riemann – Integrierbarkeit bezüglich eines Maßes zusammengefasst. Die Beweise sind etwa in dem im Literaturverzeichnis angegebenen Buch von Cinlar zu finden.

23.11 Satz:
Es sei $(\psi_i)_{i\in E}$ ein positives Maß auf E und $g \in \mathbb{B}_+$.

(i) Ist g direkt Riemann – integrierbar bezüglich $(\psi_i)_{i\in E}$, so ist

$$\sum_{j\in E} \psi_j g(j,t)$$

direkt Riemann – integrierbar (im ursprünglichen Sinne) und $\overline{\sigma}$ und $\underline{\sigma}$ konvergieren beide gegen

$$\int_0^\infty \sum_{j\in E} \psi_j g(j,t) dt.$$

(ii) Ist $g(j,t)$ monoton nichtwachsend in t für alle $j \in E$ und gelten

$$\sum_{j\in E} \psi_j g(j,0) < \infty \qquad \text{sowie} \qquad \int_0^\infty \sum_{j\in E} \psi_j g(j,t) dt < \infty,$$

so ist g direkt Riemann – integrierbar bezüglich $(\psi_i)_{i\in E}$.

(iii) *Es sei* $f \in \mathbb{B}_+$ *mit* $0 \leq f \leq g$ *und* $f(i,\cdot)$ *sei Riemann – integrierbar für jedes* $i \in E$. *Ist* g *direkt Riemann – integrierbar bezüglich* $(\psi_i)_{i\in E}$, *so auch* f.

(iv) *Sind* F_j $(j \in E)$ *Verteilungsfunktionen, die auf* $(-\infty, 0)$ *verschwinden und ist* $h \in \mathbb{B}_+$ *durch*

$$h(j,t) = \int_0^t g(j, t-s)dF_j(s) \quad (j \in E,\ t \in \mathbb{R}^+)$$

definiert und ist g *direkt Riemann – integrierbar bezüglich* $(\psi_i)_{i\in E}$, *so ist auch* h *direkt Riemann – integrierbar bezüglich* $(\psi_i)_{i\in E}$.

23.12 Satz (Markovsches Erneuerungstheorem):
Es sei (X, S) *ein Markovscher Erneuerungsprozess mit Übergangskern* Q *über einem irreduzibel positiv rekurrenten diskreten Zustandsraum* E; *für mindestens ein* j *sei* $Q_{ij}(t)$ *nicht arithmetisch.* $(\pi_i)_{i\in E}$ *sei ein positives stationäres Maß für* X *und* g *direkt Riemann–integrierbar bezüglich* $(\pi_i)_{i\in E}$. *Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty}(R * g)(i,t) = \frac{1}{\sum\limits_{k\in E}\pi_k\mu_k}\int_0^\infty \sum_{j\in E}\pi_j g(j,s)ds.$$

Im Fall eines nullrekurrenten Zustandes $i \in E$ *und sonst unverändert gelassenen Voraussetzungen gilt*

$$\lim_{t\to\infty}(R * g)(i,t) = 0.$$

Beweis:
Die wesentliche Beweisidee besteht darin, den „Rückwärtsprozess" $\tilde{Q}$ durch

$$\tilde{Q}_{ij}(t) = \frac{\pi_j}{\pi_i}Q_{ji}(t)$$

zu definieren. Im ersten Schritt werden dann Beziehungen zwischen Q und $\tilde{Q}$ hergeleitet. Diese ermöglichen es im zweiten Schritt, das Faltungsprodukt $R * g$ mithilfe einer gewöhnlichen Faltung auszudrücken, wie sie in der Erneuerungstheorie verwendet wurde. Im dritten Schritt wird auf diese Faltung dann der Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie angewendet.

1. Wegen

$$\sum_{j\in E}\tilde{Q}_{ij}(\infty) = \frac{1}{\pi_i}\sum_{j\in E}\pi_j Q_{ji}(\infty) = \frac{\pi_i}{\pi_i} = 1$$

ist auch $\tilde{Q}$ wieder Übergangskern eines Markovschen Erneuerungsprozesses, $\tilde{R} = \sum \tilde{Q}^{n*}$ sei der zugehörige Markovsche Erneuerungskern. Dann gelten

- $\pi_i\tilde{Q}^{n*}_{ij}(t) = \pi_j Q^{n*}_{ji}(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $\pi_i\tilde{R}_{ij}(t) = \pi_j R_{ji}(t)$ und
- $\tilde{R}_{ii}(t) = R_{ii}(t)$.

2. In dem durch $\tilde{Q}$ definierten Markovschen Erneuerungsprozess sei $\tilde{F}_{ji}(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ausgehend vom Startzustand j der erste Eintritt in den Zustand i bis t erfolgt, also
$$\tilde{F}_{ji}(t) = P(S_{\tilde{M}_1^{(i)}} \leq t | X_0 = j).$$
Dann ist
$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ji}(t) &= \int_0^t (1 + \tilde{R}_{ii}(t-s)) d\tilde{F}_{ji}(s) \\ &= \tilde{F}_{ji}(t) + \int_0^t \tilde{F}_{ji}(t-s) dR_{ii}(s),\end{aligned}$$
oder kurz $\tilde{R}_{ji} = \tilde{F}_{ji} + R_{ii} * \tilde{F}_{ji}$ (im Sinne der ursprünglichen Faltung). In
$$\pi_i (R * g)(i,t) = \pi_i \sum_{j \in E} \int_0^t g(j, t-s) dR_{ij}(s)$$
gilt nun für $j \neq i$
$$\begin{aligned}&\int_0^t \pi_i g(j,t-s) dR_{ij}(s) = \int_0^t \pi_j g(j,t-s) d\tilde{R}_{ji}(s) \\ =\ &\int_0^t \pi_j g(j,t-s) d\tilde{F}_{ji}(s) + \int_0^t \pi_j g(j,t-s) d(R_{ii} * \tilde{F}_{ji})(s) \\ =\ &\int_0^t \pi_j g(j,t-s) d\tilde{F}_{ji}(s) + \pi_j \int_0^t \int_0^{t-s} g(j, t-(r+s)) d\tilde{F}_{ji}(r) dR_{ii}(s),\end{aligned}$$
also
$$\begin{aligned}\pi_i (R * g)(i,t) &= \sum_{j \neq i} \pi_j \int_0^t \int_0^{t-s} g(j, t-(r+s)) d\tilde{F}_{ji}(r) dR_{ii}(s) \\ &\quad + \pi_i \int_0^t g(i,t-s) dR_{ii}(s) + \sum_{j \neq i} \int_0^t \pi_j g(j,t-s) d\tilde{F}_{ji}(s) \\ &= \left(R_{ii} * \hat{f}(i,\cdot)\right)(t) + \hat{f}(i,t) - \pi_i g(i,t)\end{aligned}$$
mit
$$\hat{f}(i,t) := \sum_{j \neq i} \pi_j \int_0^t g(j,t-s) d\tilde{F}_{ji}(s) + \pi_i g(i,t).$$

3. Da g nach Voraussetzung direkt Riemann–integrierbar bezüglich $(\pi_i)_{i \in E}$ ist, folgt mit den Punkten (i) und (iv) aus Satz 23.11 die direkte Riemann–Integrierbarkeit von $\hat{f}(i,\cdot)$

für jedes feste i. Daher kann auf $R_{ii}*\hat{f}(i,\cdot))$ der Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie angewendet werden. Wegen

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{s=0}^t g(j,t-s)d\tilde{F}_{ji}(s)dt &= \int_{s=0}^\infty \int_{t=s}^\infty g(j,t-s)dtd\tilde{F}_{ji}(s) \\
&= \int_{s=0}^\infty d\tilde{F}_{ji}(s) \int_{t=0}^\infty g(j,t)dt \\
&= \int_0^\infty g(j,t)dt
\end{aligned}$$

folgt unter Verwendung von Satz 23.9 (und dem Satz von der majorisierten Konvergenz)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \pi_i(R*g)(i,t) &= \lim_{t\to\infty} (R_{ii}*\hat{f}(i,\cdot))(t) = \frac{1}{E\left[S_1^{(i)}\right]} \int_0^\infty \hat{f}(i,s)ds \\
&= \frac{1}{\nu_i}\left(\int_0^\infty \sum_{j\neq i} \pi_j \int_{s=0}^t g(j,t-s)d\tilde{F}_{ji}(s)dt + \pi_i \int_0^\infty g(i,t)dt \right) \\
&= \frac{1}{\nu_i} \sum_{j\in E} \pi_j \int_0^\infty g(j,t)dt = \frac{\pi_i}{\sum\limits_{k\in E} \pi_k\mu_k} \sum_{j\in E} \pi_j \int_0^\infty g(j,t)dt \\
&= \frac{\pi_i}{\sum\limits_{k\in E} \pi_k\mu_k} \int_0^\infty \sum_{j\in E} \pi_j g(j,t)dt.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung, dass mindestens ein $Q_{ij}(t)$ nichtarithmetisch ist, garantiert dabei, dass R_{ii} die Erneuerungsfunktion eines nichtarithmetischen Erneuerungsprozesses ist, d.h. das tatsächlich die Variante des Fundamentalsatzes der Erneuerungstheorie für nichtarithmetische Lebensdauern verwendet werden kann.
Der Zusatz für nullrekurrente Zustände ist klar, da bei der Anwendung des Fundamentalsatzes durch die mittlere Lebensdauer geteilt wird, die in diesem Fall ∞ ist. ■

Obige Verallgemeinerung des Blackwell'schen Erneuerungstheorems erhält man wieder durch die Wahl

$$g(i,t) = 1_{[0,h)}(t) \cdot 1_{\{j\}}(i),$$

den Fundamentalsatz der Erneuerungstheorie etwa durch $E = \{i\}$.

23.4 Grenzverhalten semiregenerativer Prozesse

In diesem Abschnitt soll nun das Grenzverhalten semiregenerativer Prozesse $(Z_t)_{t\geq 0}$, die bereits in Definition 23.1 erklärt wurden, untersucht werden. Besitzt der eingebettete Markovsche Erneuerungsprozess (X,S) den Zustandsraum $E = \{i\}$, so ergibt sich ein regenerativer

Prozess; insofern bilden semiregenerative Prozesse eine Verallgemeinerung regenerativer Prozesse.
Entsprechend der Behandlung regenerativer Prozesse in Stochastik II wird zunächst eine Markovsche Erneuerungsgleichung für semiregenerative Prozesse angegeben, auf die dann anschließend das Markovsche Erneuerungstheorem angewendet wird.

23.13 Lemma:
Zusätzlich zu den Bezeichnungen aus Definition 23.1 sei der Zustandsraum E des eingebetteten Markovschen Erneuerungsprozesses (X, S) irreduzibel rekurrent und für $i \in E$ und $t \geq 0$ sowie $B \in \mathcal{A}$ seien

$$P_B(i,t) = P(Z_t \in B | Z_0 = i) \qquad \textit{und} \qquad K_B(i,t) = P(Z_t \in B, T_1 > t | Z_0 = i)$$

Dann besteht

$$P_B(i,t) = K_B(i,t) + (R * K_B)(i,t) = K_B(i,t) + \sum_{j\in E} \int_0^t K_B(j, t-s) dR_{ij}(s). \tag{23.2}$$

Beweis:
Unter Beachtung der Regenerationseigenschaft zum Zeitpunkt T_1 wird

$$\begin{aligned} & P_B(i,t) = K_B(i,t) + P(Z_t \in B, T_1 \leq t | X_0 = i) \\ = \; & K_B(i,t) + \sum_{j\in E} \int_{s=0}^{t} P(Z_t \in B \mid X_1 = j, T_1 = s, X_0 = i) dP(X_1 = j, T_1 = s \mid X_0 = i) \\ = \; & K_B(i,t) + \sum_{j\in E} \int_0^t P(Z_{t-s} \in B \mid X_0 = j) dQ_{ij}(s) = K_B(i,t) + (Q * P_B)(i,t). \end{aligned}$$

Da irreduzible Rekurrenz vorliegt, ist die Lösung dieser Markovschen Erneuerungsgleichung eindeutig und es folgt (23.2). ■

Anders als bei regenerativen Prozessen liefert die Regenerationseigenschaft alleine noch nicht die Existenz einer Grenzverteilung. Da es nur zustandsabhängige Zyklen geben muss, besteht zumindest bei unendlichem Zustandraum E des eingebetteten Markovschen Erneuerungsprozesses die Möglichkeit, dass jeder Zustand aus E nur endlich oft angenommen wird. Zum Beispiel ist mit geeigneten Zustandräumen (etwa $\mathbb{N}_0$) auch $Z_t = t$ als semiregenerativer Prozess realisierbar. Daher muss wie auch bei der Formulierung des Markovschen Erneuerungstheorems zusätzlich positive Rekurrenz der Zustände vorausgesetzt werden.

23.14 Satz (Grenzverteilung semiregenerativer Prozesse):
Es sei $(Z_t)_{t\geq 0}$ ein semiregenerativer Prozess über dem Maßraum $(A, \mathcal{A})$ mit dem eingebetteten nichtarithemtischen Markovschen Erneuerungsprozess (X, S) mit dem irreduzibel positiv rekurrenten Zustandsraum E und dem strikt positiven stationären Maß $(\pi_i)_{i\in E}$; für $\mu_i = E[T_1 | X_0 = i]$ sei

$$\sum_{k\in E} \pi_k \mu_k < \infty.$$

Weiter sei $B \in \mathcal{A}$ und die in Lemma 23.13 definierte Funktion $K_B(i,\cdot)$ für jedes $i \in E$ uneigentlich Riemann–integrierbar. Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} P(Z_t \in B \mid X_0 = i) = \frac{1}{\sum\limits_{k\in E} \mu_k \pi_k} \sum_{j\in E} \pi_j \int\limits_0^\infty P(Z_t \in B, T_1 > t | X_0 = j) dt. \tag{23.3}$$

Ist die Funktion $K_B(i,\cdot)$ für alle $B \in \mathcal{A}$ und alle i uneigentlich Riemann–integrierbar, so existiert eine Zufallsvariable Z^*, so dass für $t \to \infty$

$$Z_t \quad \xrightarrow{i.V.} \quad Z^*.$$

Beweis:
$K_B(i,t)$ ist für alle $i \in E$ monoton nichtwachsend in t. Wegen $K_B(i,t) \le 1$ gelten ferner

$$\sum_{i\in E} \pi_i K_B(i,0) \le \sum_{i\in E} \pi_i = 1 < \infty$$

sowie

$$\int\limits_0^\infty \sum_{i\in E} \pi_i K_B(i,t) dt \le \sum_{i\in E} \int_0^\infty (1 - P(T_1 \le t \mid Z_0 = i)) dt = \sum_{i\in E} \pi_i \mu_i < \infty.$$

Nach Satz 23.11 (ii) ist K_B somit direkt Riemann–integrierbar bezüglich $(\pi_i)_{i\in E}$ und es kann das Markovsche Erneuerungstheorem 23.12 mit $g = K_B$ angewendet werden. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(Z_t \in B \mid X_0 = i) &= \lim_{t\to\infty} P_B(i,t) = \lim_{t\to\infty} K_B(i,t) + \lim_{t\to\infty} (R * K_B)(i,t) \\
&= 0 + \sum_{j\in E} \frac{1}{\nu_j} \int\limits_0^\infty K_B(j,s) ds.
\end{aligned}$$

Die Darstellung (23.3) folgt unmittelbar mit Satz 23.9; die schwache Konvergenz gegen ein Grenzmaß ist damit auch bereits bewiesen. Dabei wird durch

$$P(Z^* \in B) = \lim_{t\to\infty} P(Z_t \in B \mid X_0 = i)$$

wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(Z_t \in A \mid X_0 = i) &= \sum_{j\in E} \frac{1}{\nu_j} \int\limits_0^\infty P(T_1 > t \mid X_0 = j) dt \\
&= \sum_{j\in E} \frac{E[T_1 \mid X_0 = j]}{\nu_j} = \frac{\sum\limits_{j\in E} \pi_j \mu_j}{\sum\limits_{k\in E} \pi_k \mu_k} = 1
\end{aligned}$$

eine (von i unabhängige) Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert. ■

23.15 Bemerkung:
Um die Grenzverteilung in konkreteren Situationen zu berechnen, hilft

$$K_B(j,s) = P(Z_s \in B, T_1 > s \mid X_0 = j) = E\left[1_B(Z_s) \cdot 1_{[0,T_1)}(s) \mid X_0 = j\right]$$

was mit dem Satz von Fubini auf

$$\lim_{t\to\infty} P(Z_t \in B \mid X_0 = i) = \frac{1}{\sum\limits_{k\in E} \mu_k \pi_k} \sum_{j\in E} \pi_j E\left[\int_0^{T_1} 1_B(Z_s)ds \middle| X_0 = j\right]$$

führt.
Sind alle Zustände des irreduziblen Zustandraums E nullrekurrent, so liefert das Markovsche Erneuerungstheorem die Konvergenz von $P(Z_t \in B)$ gegen 0.

23.5 Grenzverhalten von Semi–Markovprozessen

Semi–Markovprozesse stellen einerseits eine Verallgemeinerung von Markovprozessen, andererseits aber auch spezielle semiregenerative Prozesse dar. Es liegt daher nahe, mithilfe von Satz 23.14 ein Transienz– bzw. Rekurrenzkriterium zu zeigen, das Satz 22.58 über das Grenzverhalten von Markovprozessen entspricht. Das Kriterium für positive Rekurrenz folgt dabei direkt aus Satz 23.14.

23.16 Satz:
Es sei (X,S) ein nichtarithmetischer Markovscher Erneuerungsprozess über dem irreduziblen Zustandsraum E. $(Y_t)_{t\geq 0}$ sei der damit assoziierte minimale Semi–Markovprozess. Im Fall positiver Rekurrenz gilt dann

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = \frac{\pi_j \mu_j}{\sum\limits_{k\in E} \pi_k \mu_k},$$

bei Nullrekurrenz wird

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = 0.$$

Beweis:
Nach Bemerkung 23.15 zu Satz 23.14 gilt

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t \in B \mid X_0 = i) = \frac{1}{\sum\limits_{k\in E} \mu_k \pi_k} \sum_{i\in E} \pi_i E\left[\int_0^{T_1} 1_B(Y_s)ds \middle| X_0 = i\right].$$

Wähle nun $B = \{j\}$, so folgt wegen

$$E\left[\int_0^{T_1} 1_{\{j\}}(Y_s)ds \middle| X_0 = i\right] = E[\delta_{ij} T_1 \mid X_0 = i] = \delta_{ij}\mu_i$$

die Behauptung. ■

Um die komplette Aussage von Satz 22.58 auf Semi–Markovprozesse zu übertragen, fehlt noch die Untersuchung des Integrals

$$\int_0^\infty P(Y_t = j \mid X_0 = i)dt.$$

Dazu definiere

$$Z_{ij}(t) = \int_0^t P(Y_s = j \mid X_0 = i)ds = E\left[\int_0^t 1_{\{j\}}(Y_s)ds \middle| X_0 = i\right].$$

Von Interesse ist also das Verhalten von $Z_{ij}(t)$ für $t \to \infty$. Dazu zeige zunächst

23.17 Lemma:
Es sei

$$r(j,t) := 1 - \sum_{k \in E} Q_{jk}(t), \qquad j \in E, t \geq 0.$$

Dann gilt für alle $i, j \in E$ und $t \geq 0$

$$P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = \delta_{ij} r(j,t) + \int_0^t r(j, t-s)dR_{ij}(s).$$

Beweis:
Unterscheide die Fälle $J = \infty$ und $J < \infty$. Für $J = \infty$ zerlege

$$P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = P(Y_t = j, T_1 > t \mid Y_0 = i) + P(Y_t = j, T_1 \leq t \mid Y_0 = i).$$

Der erste Summand verschwindet für $i \neq j$ und für $i = j$ hat er den Wert $r(i,t)$. Ist k der Zustand, in den der Prozess zum Zeitpunkt T_1 springt und $T_1 = s$, so vereinfacht sich der zweite Summand wegen der Markovschen Erneuerungseigenschaft zu $P(Y_{t-s} = j \mid Y_0 = k)$. Summation und Integration liefert

$$P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = \delta_{ij} r(i,t) + \sum_{k \in E} \int_0^t P(Y_{t-s} = j \mid Y_0 = k)dQ_{ik}(s).$$

Mit den Bezeichnungen $h(i,t) = P(Y_t = j \mid Y_0 = i)$ und $g(i,t) = \delta_{ij} r(i,t)$ ergibt sich damit $h = g + Q * h$. Diese Markovsche Erneuerungsgleichung wird nach Lemma 23.5 durch $h = g + R * g$, also

$$P(Y_t = j \mid Y_0 = i) = \delta_{ij} r(j,t) + \sum_{k \in E} \int_0^t \delta_{kj} r(k,t)dR_{ik}(s)$$

gelöst. Wegen $J = \infty$ ist dies nach Lemma 23.7 die einzige Lösung und die Behauptung ist bewiesen.

Für $J < \infty$ muss nach Lemma 23.5 in der Lösung ein zusätzlicher Summand $d_j \in \mathbb{B}_+$ berücksichtigt werden, dessen Verschwinden gezeigt werden muss. Aus

$$P(J > t \mid X_0 = i) = 1 - P(Y_t = \Delta \mid X_0 = i) = P(Y_t \in E \mid X_0 = i) = \sum_{j \in E} P(Y_t = j \mid X_0 = i)$$

folgt zunächst

$$\begin{aligned} P(J > t | X_0 = i) &= \sum_{j \in E} \left(\delta_{ij} r(j,t) + \int_0^t r(j,t) dR_{ij}(s) \right) + \sum_{j \in E} d_j(t) \\ &= r(i,t) + (R * r)(i,t) + \sum_{j \in E} d_j(t). \end{aligned}$$

Im Beweis von Lemma 23.7 wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in E} Q_{ij}^{n*}(t) = P(J \le t \mid Y_0 = i)$$

gilt und somit folgt mit der Definition von $r = 1 - Q * 1$

$$\begin{aligned} (r + R * r)(i,t) &= r(i,t) + \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n-1} (Q^{m*} * r)(i,t) \\ &= 1 - (Q * 1)(i,t) + \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n-1} \left(Q^{m*} * 1 - Q^{(m+1)*} * 1 \right)(i,t) \\ &= 1 - \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in E} Q_{ij}^{n*}(t) = P(J > t \mid Y_0 = i). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\sum_{j \in E} d_j(t) = 0$$

und wegen $d_j \ge 0$ folgt $d_j(t) = 0$ für alle $j \in E$. ■

Unmittelbar ergibt sich nun

23.18 Satz:
Mit der Funktion r aus Lemma 23.17 und zugehöriger Integralfunktion

$$I_r(i,t) = \int_0^t r(i,u) du$$

gilt

$$Z_{ij}(t) = \delta_{ij} I_r(i,t) + \int_0^t I_r(j, t-s) dR_{ij}(s).$$

Beweis:
Folgt direkt durch Integration aus Lemma 23.17. ■

Für das Grenzverhalten gilt somit

23.19 Satz:
Es sei E ein irreduzibler Zustandsraum und

$$\mu_j = E[T_1 \mid X_0 = j] = \int\limits_0^\infty \left(1 - \sum_{k\in E} Q_{ik}(t)\right) dt$$

sei die mittlere Verweildauer im Zustand j. Genau dann konvergiert $Z_{ij}(t)$ für $t \to \infty$, wenn j transient und $\mu_j < \infty$ ist.

Beweis:
Wegen $r = 1 - \sum_k Q_{\cdot k}$ ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} Z_{ij}(t) &= \int\limits_0^\infty P(Y_s = j \mid Y_0 = i) ds \\
&= \int\limits_0^\infty \left(\delta_{ij} r(j,t) + \int\limits_0^t r(j,t-s) dR_{ij}(s)\right) dt \\
&= \delta_{ij}\mu_j + \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_s^\infty r(j,t-s)dt\right) dR_{ij}(s) = (\delta_{ij} + R_{ij}(\infty))\mu_j.
\end{aligned}$$

Das Produkt ist genau dann endlich, wenn beide Faktoren endlich sind; dabei ist $R_{ij}(\infty)$ genau dann endlich, wenn j transient ist (vgl. Bemerkung 23.3). ■

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt sollen nun noch einmal zusammengefasst werden.

23.20 Satz (Grenzverhalten von Semi–Markovprozessen):
Es sei (X, S) ein nichtarithmetischer Markovscher Erneuerungsprozess über dem irreduziblen Zustandsraum E mit den Verweildauern $\mu_i = E[T_1|X_0 = i]$ und einem stationären Maß $(\pi_i)_{i\in E}$. Für den assoziierten Semi–Markovprozess $(Y_t)_{t\geq 0}$ mit

$$Y_t = \sum_{n=0}^\infty X_n 1_{[S_n, S_{n+1})}(t), \quad t < J = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

gilt dann:

- *Genau dann konvergiert*
$$\int_0^\infty P(Y_t = j \mid X_0 = i) dt,$$
wenn j transient und $\mu_j < \infty$ ist.

- *Ist j transient oder nullrekurrent, so gilt*

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t = j \mid X_0 = i) = 0.$$

- *Ist j (und damit auch jeder andere Zustand aus E) positiv rekurrent und $\sum \pi_k\mu_k < \infty$, so gilt*

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t = j|X_0 = i) = \frac{\pi_j\mu_j}{\sum_{k\in E}\pi_k\mu_k},$$

sofern $(\pi_i)_{i\in E}$ strikt positiv gewählt wird.

23.21 Bemerkung:
Wird zusätzlich $\mu_i < \infty$ für alle $i \in E$ gefordert, so ergeben sich genau die in Satz 22.58 formulierten Rekurrenz– und Transienzkriterien. Bei Markovprozessen war $\mu_i = \frac{1}{q_i} < \infty$ für nicht aborbierende Zustände stets sichergestellt. Die durch den Fall $\mu_j = \infty$ nötige Einschränkung dieser Kriterien ist auch intuitiv klar. $Z_{ij}(t)$ stellt die mittlere Zeit dar, die der in i startende Semi–Markovprozess bis zum Zeitpunkt t im Zustand j verbringt. Wird j erreicht und ist die mittlere Verweildauer $\mu_j = \infty$, so muss auch $Z_{ij}(t)$ für $t \to \infty$ divergieren – unabhängig von der Rekurrenz oder Transienz von j.

23.22 Beispiel:
Wir kommen auf den alternierenden Erneuerungsprozess aus Bemerkung 23.2 zurück. Der Zustandsraum besteht aus zwei Zuständen, also $E = \{0, 1\}$, die „Bauteil in Reparatur" bzw. „in Betrieb" bedeuten. Der Übergangskern hat die Form $Q_{ij}(t) = F_i(t)$ für $i \neq j$, d.h. F_0 stellt die Verteilung der Reparaturdauer und F_1 die Verteilung der Lebensdauer des Bauteils dar; μ_0 bzw. μ_1 seien die zugehörigen Erwartungswerte.
Die eingebettete Markovkette besitzt die Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und es folgt sofort $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$ und somit nach Satz 23.20

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t = j \mid X_0 = i) = \frac{\mu_j}{\mu_0 + \mu_1}.$$

23.6 Das M/G/1 – Warteschlangenmodell

M/G/1 als Markovscher Erneueurungsprozess.

Es wird ein Kunden–Bedien–System mit den nachstehenden Eigenschaften betrachtet.

- Der Strom der ankommenden Kunden formt einen Poissonprozess, d.h. die Zeiten zwischen zwei Kundenankünften sind exponentiell verteilt mit dem Parameter λ; die zugehörige Verteilungsfunktion wird im Folgenden mit Λ bezeichnet.
- Die Bedienzeiten sind alle identisch und unabhängig verteilt, die gemeinsame Verteilungsfunktion sei F, der gemeinsame Erwartungswert sei $\mu \in (0, \infty)$.
- Es gibt einen Bediener; die Kunden werden alle einzeln bedient.
- Es steht unbegrenzt viel Raum für die Warteschlange zur Verfügung.

Die Tatsache, dass die Zwischenankunftszeiten exponentiell verteilt sind, hat zur Folge, dass zu jedem Zeitpunkt, zu dem die Bedienung eines Kunden abgeschlossen wird, der weitere Verlauf des Prozesses nur von der Anzahl der aktuell wartenden Kunden abhängt. Diese Zeitpunkte bilden also die Regenerationspunkte eines semiregenerativen Prozesses. Wird nun mit S_n derjenige Zeitpunkt bezeichnet, zu dem der n–te Kunde bedient worden ist (zusätzlich sei $S_0 = 0$), und zählt X_n die Kunden, die zu diesem Zeitpunkt noch im System verbleiben, so bildet (X, S) den zugehörigen Markovschen Erneuerungsprozess; der Zustandsraum ist $\mathbb{N}_0$.
Es soll nun der Markovsche Übergangskern $Q(t) = (Q_{ij}(t))_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt werden. Dazu seien

$$q_n(t) := \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^n}{n!} dF(s) \qquad \text{und} \qquad q_n := \lim_{t\to\infty} q_n(t).$$

Zur Berechung von $Q_{ij}(t) = P(X_1 = j, T_1 \le t | X_0 = i)$ beachte, dass die Anzahl der ankommenden Kunden in $[0, s]$ für $s \ge 0$ mit Parameter λs Poisson–verteilt ist. Da zum Zeitpunkt T_1 ein Kunde das System verlässt, müssen, um $X_1 = j$ zu erreichen, bis T_1 genau $j - i + 1$ Kunden ankommen. Integration über $T_1 = s$ liefert für $i \ge 1$ und $j \ge i - 1$

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t P(X_1 = j | X_0 = i, T_1 = s) dF(s) = \int_0^t \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dF(s) = q_{j-i+1}(t).$$

Für $i = 0$ muss $Q_{ij}(t)$ etwas anders berechnet werden, da nicht sofort die Bedienung des ersten Kunden beginnen kann. Stattdessen muss über den Zeitpunkt s integriert werden, zu dem der erste Kunde ankommt, mit dessen Bedienung dann sofort begonnen wird; anschließend liegt die Situtation wie bei $Q_{1j}(\cdot)$ vor, allerdings bleibt nur noch die Zeit $t - s$ übrig. Es ist also für alle $j \in \mathbb{N}_0$

$$Q_{0j}(t) = \int_0^t Q_{1j}(t-s) d\Lambda(s) = \int_0^t q_j(t-s)\lambda e^{-\lambda s} ds =: p_j(t).$$

Mit den Sätzen von Fubini und von der majorisierten Konvergenz folgt für das Grenzverhalten der p_n

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} p_n(t) &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^{t-s} \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!} dF(u) d\Lambda(s) \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t q_n d\Lambda(s) - \lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_{t-s}^{\infty} \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!} dF(u) d\Lambda(s) \\
&= q_n - \lim_{t\to\infty} \int_0^{\infty} \int_{t-u}^{t} d\Lambda(s) \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!} dF(u) \\
&= q_n - \int_0^{\infty} \lim_{t\to\infty} (\Lambda(t-u) - \Lambda(t)) \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!} dF(u) = q_n.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

23.23 Satz:
Im M/G/1–Warteschlangenmodell seien λ, μ, F, q_n, $q_n(t)$ und $p_n(t)$ wie oben defininiert. Der oben beschriebene eingebettete Markovsche Erneuerungsprozess (X, S) besitzt dann den Übergangskern

$$Q(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots \\ q_0(t) & q_1(t) & q_2(t) & \dots \\ & q_0(t) & q_1(t) & \dots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

die Markovkette X wird durch die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \dots \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots \\ & q_0 & q_1 & \dots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Das Grenzverhalten der eingebetteten Markovkette.

Es soll nun auf das Grenzverhalten der Markovkette X eingegangen werden. Dazu definiere $P_{ij} = Q_{ij}(\infty)$ und $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ als Übergangsmatrix von X und setze weiter $r = \lambda\mu$ und $r_k = 1 - q_0 - \ldots - q_k$.

23.24 Lemma:
Es gilt $r = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} j q_j$.

Beweis:
Wegen $\sum\limits_{j=0}^{\infty} q_j = 1$ ist $r_k = \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} q_j$ und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} q_j = \sum_{j=1}^{\infty} j q_j = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda s)^j}{(j-1)!} dF(s) \\ &= \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda s} \lambda s \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^j}{j!} dF(s) = \lambda \int\limits_0^{\infty} s dF(s) = \lambda\mu = r. \end{aligned}$$

Mit dieser Vorüberlegung kann nun gezeigt werden, dass wie auch beim M/M/1–Modell genau für $r < 1$ positive Rekurrenz vorliegt.

23.25 Satz:
X ist aperiodisch und irreduzibel. Genau für $r < 1$ liegt positive Rekurrenz vor.

Beweis:
Aus der Definition folgt sofort $q_k > 0$ (und auch $r_k > 0$) für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Struktur der Übergangsmatrix impliziert somit die Aperiodizität und die Irreduzibilität. Zum Nachweis positiver Rekurrenz muss die Existenz einer stationären Verteilung $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, d.h. die Erfüllbarkeit der Bedingungen

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j P_{jk} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$$

für nichtnegative π_k gezeigt werden. Die erste Bedingung führt nach Satz 23.23 auf

$$\pi_k = \pi_0 P_{0k} + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j P_{jk} = \pi_0 P_{0k} + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j q_{k-j+1} = \pi_0 q_k + \sum_{j=0}^{k} \pi_{j+1} q_{k-j}$$

und Summation liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} \pi_k &= \pi_0 \sum_{k=0}^{m} q_k + \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} \pi_{j+1} q_{k-j} = \pi_0(1-r_m) + \sum_{j=0}^{m} \pi_{j+1} \sum_{k=j}^{m} q_{k-j} \\
&= \pi_0(1-r_m) + \sum_{j=0}^{m} \pi_{j+1} \sum_{k=0}^{m-j} q_k = \pi_0(1-r_m) + \sum_{j=0}^{m-1} \pi_{j+1}(1-r_{m-j}) + \pi_{m+1} q_0;
\end{aligned}$$

und es folgt die Rekursionsvorschrift

$$\pi_{m+1} q_0 = \pi_0 r_m + \sum_{j=0}^{m-1} \pi_{j+1} r_{m-j}, \tag{23.4}$$

die für festes $\pi_0 \geq 0$ eindeutig eine Lösung der ersten Bedingung $\pi = \pi P$ liefert. Um die Summierbarkeitsbedingung zu überprüfen, summiere (23.4) über m. Unter Verwendung von Lemma 23.24 wird

$$q_0 \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{m+1} = \pi_0 \sum_{m=0}^{\infty} r_m + \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{j+1} \sum_{m=j+1}^{\infty} r_{m-j} = \pi_0 r + (r - r_0) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{j+1},$$

und wegen $q_0 = 1 - r_0$ folgt

$$(1-r)\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = r\pi_0.$$

Für $r \in (0,1)$ konvergiert die Reihe also, und mit der Wahl $\pi_0 = 1 - r$ wird auch

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \left(1 + \frac{r}{1-r}\right)\pi_0 = 1.$$

Für $r \geq 1$ ist entweder die Reihe divergent oder $\pi_0 = 0$ und damit $\pi_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. ■

Für die Grenzverteilung gilt

23.26 Satz:
Für $r = \lambda\mu \geq 1$ ist $\pi_j := \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$. Ist $r < 1$, so folgt

$$\pi_0 = 1 - r, \quad \pi_1 = (1-r)\frac{r_0}{q_0} \quad \textit{und} \quad \pi_{j+1} = (1-r)\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{q_0^{k+1}} s_{jk} \quad (j \geq 1) \tag{23.5}$$

mit

$$s_{jk} := \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=j, \alpha_i \geq 1} r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_k}.$$

Beweis:
Die Darstellungen für π_0 und π_1 folgen direkt aus der Wahl von $\pi_0 = 1-r$ aus dem Beweis von Satz 23.25 und der Rekursion (23.4) für $m = 0$. Damit wird dann $\pi_0 + \pi_1 = (1-r)\left(1 + \frac{r_0}{q_0}\right) = \frac{1-r}{q_0}$ und erneut nach (23.4) folgt

$$\pi_2 = \frac{1}{q_0}(\pi_0 r_1 + \pi_1 r_1) = \frac{(1-r) r_1}{q_0^2}.$$

Um den Rest der Behauptung per Induktion zu beweisen, beachte

$$s_{j+1,k+1} = \sum_{\beta=1}^{j+1-k} s_{j+1-\beta,k} r_\beta = \sum_{m=k}^{j} s_{m,k} r_{j+1-m}.$$

Für $j \geq 1$ folgt nun nach (23.4) und Induktionvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\frac{q_0 \pi_{j+2}}{1-r} &= \frac{r_{j+1}(\pi_0 + \pi_1)}{1-r} + \frac{\sum\limits_{m=1}^{j} r_{j+1-m}\pi_{m+1}}{1-r} = \frac{r_{j+1}}{q_0} + \sum_{m=1}^{j}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_0^{k+1}} s_{mk} r_{j+1-m} \\
&= \frac{r_{j+1}}{q_0} + \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{q_0^{k+1}} \sum_{m=k}^{j} s_{mk} r_{j+1-m} = \frac{s_{j+1,1}}{q_0} + \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{q_0^{k+1}} s_{j+1,k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{q_0^k} s_{j+1,k}.
\end{aligned}$$

23.27 Bemerkung:
In Beispiel 21.48 wurde gezeigt, dass genau für $r \leq 1$ Rekurrenz vorliegt, d.h. genau für $r = 1$ ist das System null–rekurrent, für $r > 1$ ist es transient.

Die zeitabhängige Beschreibung des M/G/1–Modells.

Es sei Z_t die Anzahl der Kunden im System zum Zeitpunkt t. Dann stellt $(Z_t)_{t\geq 0}$ einen semiregenerativen Prozess dar. Unter der zeitabhängigen Beschreibung des M/G/1–Modells versteht man die Untersuchung der Wahrscheinichkeiten $P(Z_t = k)$ für $t \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Die explizite Darstellung dieser Wahrscheinlichkeiten ist bereits im einfacheren M/M/1–Modell sehr schwierig, für wenig kompliziertere Modelle bereits nicht mehr möglich. Die Markovsche Erneuerungstheorie ermöglicht es immerhin, diese zeitabhängigen Wahrscheinlichkeiten unter Rückgriff auf die Markovsche Erneuerungsfunktion $R(t)$ anzugeben.

23.28 Satz:
Es gilt

$$P(Z_t = k|X_0 = i) = K_k(i,t) + \sum_{j=0}^{k} \int_0^t K_k(j, t-s) dR_{ij}(s)$$

mit

$$K_k(j,t) := \begin{cases} e^{-\lambda t}, & j = k = 0, \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)}(1-F(s)) \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} ds, & j = 0, k > 0, \\ (1-F(t)) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-j}}{(k-j)!}, & j > 0, k \geq j, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:
In Anbetracht von Lemma 23.13 reicht es zu zeigen, dass $K_k(j,t) = P(Z_t = k, S_1 > t|X_0 = j)$ gilt; aufgrund des letzten Falls in der Definition von K_k braucht die Summe nur bis k erstreckt werden. Für $j > k$ ist $P(Z_t = k, S_1 > t|X_0 = j) = 0$; für $0 < j \leq k$ gibt $1 - F(t)$ die Wahrscheinlichkeit an, dass $S_1 > t$ ist, und der Term $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-j}}{(k-j)!}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für genau $k - j$ Ankünfte bis t an. Zur Nachvollziehung des Falles für $j = 0$ und $k > 0$ betrachte den Zeitpunkt s, zu dem der erste Kunde das System betritt. Integration liefert in diesem Fall

$$K_k(0,t) = \int_0^t K_{k-1}(1, t-s) d\Lambda(s) = \int_0^t K_{k-1}(1, s) d\Lambda(t-s),$$

und die bereits bewiesene Darstellung für den dritten Fall sowie die Substitution $u = t - s$ liefern die Behauptung.
Der erste Fall schließlich folgt daraus, dass $e^{-\lambda t} = 1 - \Lambda(t)$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass bis zum Zeitpunkt t kein Kunde ankommt. ■

Das Grenzverhalten des M/G/1–Modells.

Es soll nun das Grenzverhalten der Wahrscheinlichkeiten $P(Z_t = k|X_0 = i)$ für $t \to \infty$ untersucht werden. Es wurde bereits in Satz 23.26 das asymptotische Verhalten dieser Wahrscheinlichkeiten eingeschränkt auf die Zeitpunkte $t = S_n$ beschrieben. Die Markovsche Erneuerungstheorie ermöglicht den Nachweis, dass $P(Z_t = k|X_0 = i)$ ganz allgemein die dort angegebenen Grenzwerte besitzt.

23.29 Satz:
Für $r \geq 1$ ist $\pi_j := \lim_{n\to\infty} P(Z_t = j|X_0 = i) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$. Ist $r < 1$, so folgt

$$\pi_0 = 1 - r, \quad \pi_1 = (1-r)\frac{r_0}{q_0} \quad \textit{und} \quad \pi_{j+1} = (1-r)\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{q_0^{k+1}} s_{jk} \quad (j \geq 1)$$

mit

$$s_{jk} := \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k = j, \alpha_i \geq 1} r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_k}.$$

Beweis:
Für $r > 1$ sind alle Zustände transient, insbesondere konvergieren die Komponenten der Erneuerungsfunktion, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} R_{ij}(t) =: R_{ij}(\infty) < \infty,$$

und nach Satz 23.28 wird

$$\lim_{t\to\infty} P(Z_t = k \mid X_0 = i) = K_k(i,\infty) + \sum_{j=0}^{k} K_k(j,\infty) R_{ij}(\infty) = 0,$$

da K_k in allen Fällen gegen 0 konvergiert (aus der Definition von K_k ist die Konvergenz für $j > 0$ oder $k = 0$ klar, im Fall $j = 0 < k$ gilt $K_k(0,\cdot) = K_k(1,\cdot) * \Lambda$ und wegen der Konvergenz von $K_k(1,t)$ und der Beschränktheit von Λ folgt auch hier die Konvergenz gegen 0).
Sei nun $r \leq 1$, d.h. der Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ ist irreduzibel rekurrent. Da die Verweilzeit in 0 eine exponentielle Komponente enthält, sind alle Zustände nichtarithmetisch. Ferner ist für $j, k > 0$

$$K_0(0,t) = 1 - \Lambda(t), \quad K_k(0,t) \leq (\Lambda * (1-F))(t) \quad \text{und} \quad K_k(j,t) \leq (1 - F(t)),$$

insbesondere ist $K_k(j,t)$ für alle $j, k \geq 0$ (uneigentlich) Riemann–integrierbar. Bezeichnet (ψ_j) die Grenzverteilung der Markovkette aus Satz 23.26, so folgt mit Satz 23.14 über semi-regenerative Prozesse, dass

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty} P(Z_t = k \mid X_0 = i) = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i \mu_i} \sum_{j=0}^{k} \psi_j \int\limits_0^{\infty} K_k(j,t)dt$$

ist, sofern $\sum \psi_i \mu_i < \infty$ ist und sonst $\pi_k = 0$. Die $\mu_i = E[T_1 | X_0 = i]$ können hier sehr einfach berechnet werden, da $\mu_i = \mu$ für $i > 0$ und $\mu_0 = \mu + \frac{1}{\lambda}$ gilt. Im Fall $r = 1$ existiert kein summierbares (von 0 verschiedenes) stationäres Maß (ψ_i) für die eingebettete Markovkette und es folgt $\pi_k = 0$.
Im Fall $r < 1$ ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \mu_i = \frac{\psi_0}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i = \frac{\psi_0 + r}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

also

$$\pi_k = \lambda \sum_{j=0}^{k} \psi_j \int_0^{\infty} K_k(j,t)dt. \tag{23.6}$$

Um $\pi_k = \psi_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen, setze

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k \quad \text{und} \quad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k$$

und zeige $H(z) = G(z)$ für alle $z \in [0,1)$. Für derartige z konvergieren beide Reihen absolut und es gilt

$$
\begin{aligned}
(1-z)H(z) &= \lambda(1-z)\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\int_0^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}K_k(j,t)z^k dt \\
&= \psi_0\left(\lambda(1-z)\int\limits_0^{\infty}K_0(0,t)dt+\lambda(1-z)z\int\limits_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}K_k(0,t)z^{k-1}dt\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\lambda(1-z)z^j\int\limits_0^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}K_k(j,t)z^{k-j}dt \\
&= \psi_0\left((1-z)+\lambda(1-z)z\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{t}\lambda e^{-\lambda(t-s)}(1-F(s))e^{-\lambda s(1-z)}dsdt\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j z^j\int\limits_0^{\infty}\lambda(1-z)e^{-\lambda(1-z)t}(1-F(t))dt \\
&= \psi_0\left((1-z)+z\int\limits_0^{\infty}\int\limits_s^{\infty}\lambda e^{-\lambda(t-s)}dt(1-F(s))\lambda(1-z)e^{-\lambda(1-z)s}ds\right) \\
&\quad +\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j z^j\int_0^{\infty}\lambda(1-z)e^{-\lambda(1-z)t}(1-F(t))dt.
\end{aligned}
$$

Mit

$$\tilde{\varphi}(z) := 1-\int_0^{\infty}\lambda(1-z)e^{-\lambda(1-z)t}(1-F(t))dt$$

folgt einerseits

$$
\begin{aligned}
(1-z)H(z) &= \psi_0(1-z+z(1-\tilde{\varphi}(z)))+\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j z^j(1-\tilde{\varphi}(z)) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j(1-\tilde{\varphi}(z))+\psi_0(1-z\tilde{\varphi}(z)-(1-\tilde{\varphi}(z))) \\
&= G(z)(1-\tilde{\varphi}(z))+\psi_0\tilde{\varphi}(z)(1-z).
\end{aligned}
$$

Beachte nun, dass (mit $a := \lambda(1-z)$)

$$\tilde{\varphi}(z) = 1-\int\limits_0^{\infty}ae^{-at}\int\limits_t^{\infty}dF(u)dt = \int\limits_0^{\infty}\left(1-\int_0^u ae^{-at}dt\right)dF(u) = \int\limits_0^{\infty}e^{-au}dF(u)$$

und somit

$$\sum_{j=0}^{\infty}q_j z^j = \int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda tz)^j}{j!}dF(t) = \int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda(1-z)t}dF(t) = \tilde{\varphi}(z)$$

gilt. Wegen $\psi = \psi P$ folgt nun andererseits

$$\begin{aligned} zG(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^{k+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} z^{k+1} = \psi_0 z \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i z^i \sum_{k=i-1}^{\infty} q_{k+1-i} z^{k+1-i} \\ &= \left(\psi_0 z - \psi_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i z^i \right) \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = G(z)\tilde{\varphi}(z) - \psi_0 (1-z)\tilde{\varphi}(z) \end{aligned}$$

und zusammen

$$(1-z)H(z) = G(z)(1-\tilde{\varphi}(z)) + G(z)\tilde{\varphi}(z) - zG(z) = (1-z)G(z).$$

Damit ist die Identität $H(z) = G(z)$ auf dem Intervall $[0, 1)$ gezeigt und insbesondere folgt $\pi_k = \psi_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Die in einem Zustand verbrachte Zeit.

Das Beispiel des M/G/1–Modells abschließend soll noch die Zeit berechnet werden, die das System in einem Zustand k verbringt.

23.30 Satz:
Es sei $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Kostenfunktion der Zustände. Für die mittleren „Kosten“ bis zum Zeitpunkt t gilt

$$E\left[\int_0^t v(Z_s) ds | X_0 = i \right] = \sum_{k=0}^{\infty} V_{ik}(t) v(k)$$

mit

$$V_{ik}(t) = \delta_{ik} I(i,t) + \int_0^t I(k, t-s) dR_{ik}(s) \quad \textit{und} \quad I(j,t) = \begin{cases} \int_0^t (1 - (F * \Lambda)(u)) du, & j = 0, \\ \int_0^t (1 - F(u)) du, & j > 0. \end{cases}$$

Beweis:
Es ist

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) 1_{\{k\}} \quad \text{und} \quad E\left[\int_0^t 1_{\{k\}}(Z_s) \middle| X_0 = i \right] = Z_{ik}(t)$$

mit der Funktion $Z(i; k, t)$ aus dem Kapitel über Semi–Markovprozesse, die nach Lemma 23.18 berechnet werden kann; mit

$$r(i,t) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} Q_{ik}(t) \quad \text{und} \quad I_r(i,t) = \int_0^t r(i,u) du$$

gilt

$$Z_{ik}(t) = \delta_{ik} I_r(i,t) + \int_0^t I_r(k, t-s) dR_{ik}(s).$$

Für $i > 0$ ist hier

$$r(i,t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) = 1 - \int_0^t e^{-\lambda s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} dF(s) = 1 - F(t),$$

ferner ist

$$r(0,t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 - \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-s) d\Lambda(s) = 1 - \int_0^t F(t-s) d\Lambda(s) = 1 - (F * \Lambda)(t).$$

Damit ist $I_r = I$, $Z_{ik}(t) = V_{ik}(t)$ (für alle $i,k \in E$ und $t \in \mathbb{R}^+$) und die Behauptung ist gezeigt. ∎

Von Interesse ist noch das asymptotische Verhalten der mittleren Kosten, also eine Form Ergodensatz.

23.31 Satz:
Es sei $r < 1$ und $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Grenzverteilung aus Satz 23.29. Ferner sei $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion, für die $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k |v(k)| < \infty$ ist (v muss nicht notwendig beschränkt sein). Dann gilt unabhängig vom Startzustand i

$$w := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t v(Z_s) ds \mid X_0 = i\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k v(k).$$

Beweis:
Es wird zunächst

$$w_k := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} E\left[\int_0^t 1_{\{k\}}(Z_s) ds \mid X_0 = i\right] = \pi_k$$

gezeigt. Nach Folgerung 23.19 (bzw. nach Satz 23.30) strebt der Erwartungswert im Zähler für $t \to \infty$ gegen ∞. Wegen

$$E\left[\int_0^t 1_{\{k\}}(Z_s) ds \mid X_0 = i\right] = \int_0^t P(Z_s = k | X_0 = i) ds$$

folgt mit der Regel von L'Hospital

$$w_k = \lim_{t \to \infty} P(Z_t = k \mid X_0 = i)$$

und Satz 23.29 liefert $w_k = \pi_k$. Es gilt weiter

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{k\}} v(k)$$

und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} w &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int\limits_0^t \sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{k\}} v(k)(Z_s) ds \mid X_0 = i \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E\left[\int\limits_0^t 1_{\{k\}}(Z_s) ds \mid X_0 = i \right] v(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k v(k). \end{aligned}$$

Literatur zu Kapitel 23

Folgende Bücher werden als begleitende Literatur zu diesem Kapitel des Skriptes empfohlen:

- S. I. Resnick:
  Adventures in Stochastic Processes,
  Birkhäuser, Boston, 1992.
  ISBN:0817635912

- E. Cinlar:
  Introduction to stochastic processes,
  Prentice–Hall, 1975.

Anhang A

Lineare Differenzengleichungen

Allgemeine homogene lineare Differenzengleichungen

Unter einer homogenen linearen Differenzengleichung der Ordnung r, $r \in \mathbb{N}$, versteht man eine Rekursion der Form

$$a_n^{(r)} x_{n+r} + a_n^{(r-1)} x_{n+r-1} + \ldots + a_n^{(0)} x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{A.1}$$

wobei die Koeffizienten $a_n^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, r$ irgendwelche komplexe Zahlen sind. Jede komplexwertige Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die der Rekursion (A.1) genügt, nennt man eine Lösung der linearen Differenzengleichung.

A.1 Satz:
Ist $a_n^{(0)} \cdot a_n^{(r)} \neq 0$ für alle n, so ist jede Lösung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von (A.1) durch r beliebige aufeinanderfolgende Werte x_N, x_{N+1}, ..., x_{N+r-1} eindeutig bestimmt.

Beweis:
Aufgrund der Annahme $a_n^{(0)} \cdot a_n^{(r)} \neq 0$ für alle n kann man die Differenzengleichung (A.1) für $n = N$ bzw. $n = N - 1$ sowohl auf die Form

$$x_{N+r} = \frac{-a_N^{(r-1)} x_{N+r-1} - \ldots - a_N^{(0)} x_N}{a_N^{(r)}} \tag{A.2}$$

als auch auf die Form

$$x_{N-1} = \frac{-a_{N-1}^{(r)} x_{N+r-1} - a_{N-1}^{(r-1)} x_{N+r-2} - \ldots - a_{N-1}^{(1)} x_N}{a_{N-1}^{(0)}} \tag{A.3}$$

bringen, woran man erkennt, daß die Funktion $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nicht nur für aufsteigende, sondern auch für absteigende Indizes eindeutig bestimmt ist. ■

A.2 Satz:
Es bezeichnen $x_n^{(1)}$ und $x_n^{(2)}$ zwei Lösungen der Differenzengleichung (A.1) und es seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $\alpha_1 x_n^{(1)}$ und $\alpha_1 x_n^{(1)} + \alpha_2 x_n^{(2)}$ Lösungen der Differenzengleichung (A.1).

Beweis:
Aus

$$\alpha_1 \left[a_n^{(r)} x_{n+r}^{(1)} + a_n^{(r-1)} x_{n+r-1}^{(1)} + \ldots + a_n^{(0)} x_n^{(1)} \right] = 0$$

folgt sofort

$$a_n^{(r)}\left(\alpha_1 x_{n+r}^{(1)}\right)+a_n^{(r-1)}\left(\alpha_1 x_{n+r-1}^{(1)}\right)+\ldots+a_n^{(0)}\left(\alpha_1 x_n^{(1)}\right)=0\,.$$

Ebenso schließt man aus

$$a_n^{(r)}\left(\alpha_1 x_{n+r}^{(1)}\right)+a_n^{(r-1)}\left(\alpha_1 x_{n+r-1}^{(1)}\right)+\ldots+a_n^{(0)}\left(\alpha_1 x_n^{(1)}\right)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

und

$$a_n^{(r)}\left(\alpha_2 x_{n+r}^{(2)}\right)+a_n^{(r-1)}\left(\alpha_2 x_{n+r-1}^{(2)}\right)+\ldots+a_n^{(0)}\left(\alpha_2 x_n^{(2)}\right)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

auf

$$\begin{aligned}a_n^{(r)}\left(\alpha_1 x_{n+r}^{(1)}+\alpha_2 x_{n+r}^{(2)}\right)+a_n^{(r-1)}\left(\alpha_1 x_{n+r-1}^{(1)}+\alpha_2 x_{n+r-1}^{(2)}\right)+\ldots\\ \ldots+a_n^{(0)}\left(\alpha_1 x_n^{(1)}+\alpha_2 x_n^{(2)}\right)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,.\end{aligned}$$

■

A.3 Definition:
$x^{(1)}$, …, $x^{(m)}$ *seien Lösungen der linearen Differenzengleichung* (A.1). *Die Funktionen* $x^{(1)}$, …, $x^{(m)}$ *heißen linear abhängig, falls es nicht gleichzeitig verschwindende Konstanten* α_1, …, α_m *mit*

$$\alpha_1 x_n^{(1)}+\ldots+\alpha_m x_n^{(m)}=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

gibt. Andernfalls heißen sie linear unabhängig.

A.4 Definition:
Es seien $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(r)}$ *Lösungen der linearen Differenzengleichung (A.1). Dann bezeichnet man die Matrix*

$$X_n=\begin{bmatrix} x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(r)}\\ x_{n+1}^{(1)} & \cdots & x_{n+1}^{(r)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n+r-1}^{(1)} & \cdots & x_{n+r-1}^{(r)}\end{bmatrix} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

als Casorati-Matrix und

$$C_n=\det(X_n) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

als Casorati-Determinante der Differenzengleichung (A.1).

A.5 Satz:
Die Casorati-Determinante der homogenen linearen Differenzengleichung (A.1) genügt der Rekursionsformel

$$C_{n+1}=(-1)^r\cdot\frac{a_n^{(0)}}{a_n^{(r)}}\cdot C_n \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,. \tag{A.4}$$

Beweis:
Mit Hilfe der Matrizen

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -\frac{a_n^{(0)}}{a_n^{(r)}} & -\frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(r)}} & \cdots & & \cdots & -\frac{a_n^{(r-1)}}{a_n^{(r)}} \end{bmatrix}$$

läßt sich die Rekursion (A.1) auf die Form

$$X_{n+1} = A_n X_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bringen, wobei die X_n wie in Definition 4 erklärt sind. Die Behauptung folgt aus den Beziehungen

$$C_{n+1} = \det(X_{n+1}) = \det(A_n X_n) = \det(A_n) \cdot C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$\det(A_n) = (-1)^n \cdot \frac{a_n^{(0)}}{a_n^{(r)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

A.6 Satz:
$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ bezeichnen Lösungen der Differenzengleichung (A.1). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktionen $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ sind linear abhängig.

(ii) $C_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $C_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:
Wir nehmen zunächst an, daß die Funktionen $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ linear abhängig sind. Dann existieren Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_n^{(1)} + \ldots + \alpha_r x_n^{(r)} &= 0 \\ \alpha_1 x_{n+1}^{(1)} + \ldots + \alpha_r x_{n+1}^{(r)} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 x_{n+r-1}^{(1)} + \ldots + \alpha_r x_{n+r-1}^{(r)} &= 0 \end{aligned}$$

Da dieses System aufgrund der Voraussetzung eine nichttriviale Lösung besitzt, muß die Determinante der Koeffizientenmatrix X_n verschwinden. Aus $C_n = \det(X_n) = 0$ aber folgt aufgrund von Satz 5 $C_n = 0$ für alle n.
Sei nun $C_N = 0$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ angenommen. Dann existieren Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_N^{(1)} + \ldots + \alpha_r x_N^{(r)} &= 0 \\ \alpha_1 x_{N+1}^{(1)} + \ldots + \alpha_r x_{N+1}^{(r)} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 x_{N+r-1}^{(1)} + \ldots + \alpha_r x_{N+r-1}^{(r)} &= 0. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Da aufgrund von Satz 2 mit $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ auch

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_n^{(i)}$$

eine Lösung der Differenzengleichung (A.1) ist, entnehmen wir dem System (A.5)

$$x_N = x_{N+1} = \ldots = x_{N+r-1} = 0\,.$$

Mit Hilfe der Formeln (A.2) und (A.3) schließen wir weiter, daß $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich sind die Funktionen $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ linear abhängig. ■

A.7 Definition:
Jedes System von r linear unabhängigen Lösungen der Differenzengleichung (A.1) wird Fundamentalsystem genannt.

A.8 Satz:
Es sei $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ ein Fundamentalsystem der Differenzengleichung (A.1). Dann kann jede Lösung $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von (A.1) als Linearkombination der Form

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_n^{(i)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

dargestellt werden.

Beweis:
Da $C_n = \det(X_n) \neq 0$ vorausgesetzt ist, hat das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x_N \\ x_{N+1} \\ \vdots \\ x_{N+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N^{(1)} & \cdots & x_N^{(r)} \\ x_{N+1}^{(1)} & \cdots & x_{N+1}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N+r-1}^{(1)} & \cdots & x_{N+r-1}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}$$

bzgl. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ eine eindeutige Lösung. Da jede Lösung von (A.1) durch r beliebige aufeinanderfolgender Werte $x_N, x_{N+1}, \ldots, x_{N+r-1}$ eindeutig festgelegt ist, ist der Satz damit bewiesen. ■

A.1 Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Als nächstes wollen wir das Lösungsverhalten der Differenzengleichung (A.1) unter der Annahme $a_n^{(i)} = a_i$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, r$ und $n \geq 0$ studieren. Dazu machen wir den Ansatz

$$x_n = \lambda^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{A.6}$$

wobei λ irgendeine komplexe Zahl bedeuten soll. Setzt man (A.6) in (A.1) ein, erhält man (nach Division durch λ^n) die charakteristische Gleichung

$$\sum_{i=0}^{r} a_i \lambda^i = 0. \tag{A.7}$$

Wir nehmen zunächst an, daß die r Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ der Gleichung (A.7) alle verschieden sind. Dann bilden die Funktionen

$$\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_r^n$$

ein Fundamentalsystem der Differenzengleichung (A.1). Denn es ist

$$\det(X_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \cdots & \lambda_r^n \\ \lambda_1^{n+1} & \cdots & \lambda_r^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n+r-1} & \cdots & \lambda_r^{n+r-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i^n\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i^n\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 - \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_r - \lambda_1 \\ \lambda_1^2 - \lambda_1 \cdot \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 & \cdots & \lambda_r^2 - \lambda_1 \cdot \lambda_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} - \lambda_1 \cdot \lambda_1^{r-2} & \lambda_2^{r-1} - \lambda_1 \cdot \lambda_2^{r-2} & \cdots & \lambda_r^{r-1} - \lambda_1 \cdot \lambda_r^{r-2} \end{vmatrix}$$

(vorangehende Zeile mit λ_1 multiplizieren und von der aktuellen abziehen)

$$= \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i^n\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{r-2} & \lambda_3^{r-2} & \cdots & \lambda_r^{r-2} \end{vmatrix} \cdot \prod_{i=2}^{r} (\lambda_i - \lambda_1) \text{ usw.}$$

Bildet λ_1 eine mehrfache Nullstelle mit der Vielfachheit θ_1, dann sind neben λ_1^n auch

$$n \cdot \lambda_1^n, n^2 \cdot \lambda_1^n, \ldots, n^{\theta_1 - 1} \cdot \lambda_1^n$$

Lösungen der Differenzengleichung (A.1). Um dies zu erkennen, führen wir den Shift-Operator

$$Ex_n = x_{n+1} \tag{A.8}$$

ein. Dann kann man die Differenzengleichung (A.1) für $a_n^{(i)} = a_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ auch in der Form

$$[a_r E^r + a_{r-1} E^{r-1} + \ldots + a_0] x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{A.9}$$

bzw.

$$(E - \lambda_1)^{\theta_1} \cdot \ldots \cdot (E - \lambda_m)^{\theta_m} x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{A.10}$$

schreiben, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die m verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (A.7) und $\theta_1, \ldots, \theta_m$ ihre Vielfachheiten bedeuten. Aufgrund der Darstellung (A.10) genügt es auch, sich auf einen der Faktoren $(E - \lambda_i)^{\theta_i}$ zu beschränken (o.B.d.A. $i = 1$) und die Gleichung

$$(E - \lambda_1)^{\theta_1} x_n = 0 \tag{A.11}$$

zu studieren. Denn jede Lösung von (A.11) ist zwangsläufig auch eine Lösung von (A.10) bzw. (A.9). Für x_n machen wir jetzt den Ansatz

$$x_n = \lambda_1^n \cdot v_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots). \tag{A.12}$$

Setzt man (A.12) in (A.11) ein, bekommt man

$$
\begin{aligned}
0 = (E-\lambda_1)^{\theta_1}\cdot\lambda_1^n\cdot v_n &= \sum_{i=0}^{\theta_1}\binom{\theta_1}{i}(-\lambda_1)^{\theta_1-i}E^i(\lambda_1^n\cdot v_n)\\
&= \sum_{i=0}^{\theta_1}\binom{\theta_1}{i}(-\lambda_1)^{\theta_1-i}\lambda_1^{n+i}\cdot E^i v_n\\
&= \lambda_1^{\theta_1+n}\cdot\sum_{i=0}^{\theta_1}\binom{\theta_1}{i}(-1)^{\theta_1-i}\cdot E^i v_n\\
&= \lambda_1^{\theta_1+n}\cdot(E-1)^{\theta_1}\cdot v_n\\
&= \lambda_1^{\theta_1+n}\cdot\Delta^{\theta_1}v_n\,,
\end{aligned}
$$

wobei

$$\Delta v_n = v_{n+1}-v_n \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,.$$

Damit haben wir das Problem verlagert auf die Lösung der Differenzengleichung

$$\Delta^{\theta_1}v_n = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{A.13}$$

Bevor wir den Sachverhalt allgemein klären, einige einfache Rechnungen:

$$\theta_1 = 1:\quad \Delta v_n = v_{n+1}-v_n = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

wird durch $v_n = 1$ gelöst.

$$
\begin{aligned}
\theta_1 = 2:\quad \Delta^2 v_n &= \Delta(\Delta v_n) = \Delta(v_{n+1}-v_n) = v_{n+2}-v_{n+1}-(v_{n+1}-v_n)\\
&= v_{n+2}-2v_{n+1}+v_n = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,.
\end{aligned}
$$

Zwei linear unabhängige Lösungen sind

$$v_n^{(1)} = 1 \qquad \text{und} \qquad v_n^{(2)} = n \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,.$$

Probe:

1. $1-2+1=0\,,$
2. $(n+2)-2\cdot(n+1)+n = n+2-2n-2+n = 0\,.$

Außerdem ist

$$\det(X_n) = \begin{vmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{vmatrix} = n+1-n = 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots)\,.$$

Allgemein gilt

$$
\begin{aligned}
\Delta n^k &= (n+1)^k - n^k \\
&= [n^k + k\cdot n^{k+1} + \frac{k\cdot(k+1)}{2!} + \ldots] - n^k \\
&= k\cdot n^{k-1} + \frac{k\cdot(k+1)}{2!} n^{k-2} + \ldots \\
\Delta^2 n^k &= (n+2)^k - 2(n+1)^k + n^k \\
&= n^k \cdot 2^0 + k\cdot n^{k-1}\cdot 2^1 + \frac{k\cdot(k-1)}{2!} n^{k-2}\cdot 2^2 + \ldots \\
&\quad - 2\cdot[n^k\cdot 1^0 + k\cdot n^{k-1}\cdot 1 + \frac{k\cdot(k-1)}{2!} n^{k-2}\cdot 1^2 + \ldots] + n^k \\
&= k\cdot(k-1)\cdot n^{k-2} + \ldots \\
&\vdots \\
\Delta^k n^k &= k!
\end{aligned}
$$

Mit anderen Worten:

$$\Delta^{k+i} n^k = 0 \text{ für } i \geq 1.$$

Deshalb bilden die Funktionen

$$\lambda_1^n, n\cdot\lambda_1^n, n^2\cdot\lambda_1^n, \ldots, n^{\theta_1-1}\lambda_1^n$$

Lösungen der Differenzengleichung (A.11). Ihre lineare Unabhängigkeit beweisen wir mit Hilfe der Definition 3:

$$\alpha_1\cdot\lambda_1^n + \alpha_2\cdot n\cdot\lambda_1^n + \ldots + \alpha_{\theta_1}\cdot n^{\theta_1-1}\cdot\lambda_1^n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

impliziert

$$\alpha_1 + \alpha_2\cdot n + \alpha_3\cdot n^2 + \ldots + \alpha_{\theta_1}\cdot n^{\theta_1-1} = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Da aber ein Polynom der Ordnung $\theta_1 - 1$ höchstens $\theta_1 - 1$ Nullstellen besitzt, muß $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{\theta_1} = 0$ gelten. Im allgemeinen Fall muß man

$$\lambda_1^n\cdot[\alpha_1 + n\alpha_2 + \ldots + n^{\theta_1-1}\alpha_{\theta_1}] + \lambda_2^n\cdot[\alpha_{\theta_1+1} + n\cdot\alpha_{\theta_1+2} + \ldots + n^{\theta_2-1}\cdot\alpha_{\theta_1+\theta_2}] + \ldots = 0$$

überprüfen. Dazu dividiert man sukzessive durch $\lambda_1^n\cdot n^{\theta_1-1}, \lambda_1^n\cdot n^{\theta_1-2}, \ldots$ und führt den Grenzübergang $n\to\infty$ durch. Unter der Annahme $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m|$ ergibt sich auf diese Weise $\alpha_{\theta_1} = \alpha_{\theta_1-1} = \ldots = 0$. Zusammenfassend erhalten wir das folgende Ergebnis.

A.9 Satz:
Die charakteristische Gleichung besitze die Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten θ_1, $\ldots$, θ_m. Dann besitzt die Differenzengleichung (A.1) ein Fundamentalsystem der Form

$$\lambda_1^n, n\cdot\lambda_1^n, \ldots, n^{\theta_1-1}\cdot\lambda_1^n, \ldots, \lambda_m^n, n\cdot\lambda_m^n, \ldots, n^{\theta_m}\cdot\lambda_m^n.$$

A.10 Beispiel:
Betrachte die Differenzengleichung dritter Ordnung:

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2) = 0\,.$$

Die charakteristischen Wurzeln sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den Vielfachheiten 2 und 1. Deshalb bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= \lambda_1^n = 1^n = 1 \\ x_n^{(2)} &= n \cdot \lambda_1^n = n \cdot 1^n = n \qquad (n = 0, 1, 2\ldots) \\ x_n^{(3)} &= \lambda_2^n = 2^n \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem. Die zugehörige Casorati–Determinante ist

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & n & 2^n \\ 1 & n+1 & 2^{n+1} \\ 1 & n+2 & 2^{n+2} \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 1 & n+1 & 2 \\ 1 & n+2 & 4 \end{vmatrix} = 2^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2^n \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wie es aufgrund von Satz A.9 erwartet werden konnte.

A.11 Beispiel:
Man löse die Differenzengleichung

$$x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ..)$$

mit den Anfangswerten

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.$$

Lösung: Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

und hat die Wurzeln

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Die allgemeine Lösung lautet deshalb:

$$x_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Folglich muß gelten:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 + \alpha_3 = 0\,, \\ x_1 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1\,, \\ x_2 &= 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 9\alpha_3 = 1\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -3\,.$$

Die gesuchte Lösung ist deshalb

$$x_n = 3 \cdot (2^n) + 2 \cdot n \cdot (2^n) - 3^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

A.12 Beispiel (Fibonacci-Zahlen, Vermehrung von Kaninchen):
Modellannahmen: Zu Beginn ein reifes Paar. Reifezeit 2 Monate, dann jeden Monat ein neues Paar als Nachwuchs. Leonardo d. Pisa, 1202.

Monat	n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Populationsumfang	x_n	1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$

$$\begin{aligned} x_0 &= 1\,, \\ x_1 &= 2\,, \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

und hat die Wurzeln

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Folglich lautet die allgemeine Lösung

$$x_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ x_1 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1 - \alpha_1 \\ 2 &= \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-\alpha_1) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\alpha_1 \cdot \sqrt{5} = 2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{4-1+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2\cdot\sqrt{5}} \\ \alpha_2 &= 1 - \alpha_1 = \frac{2\cdot\sqrt{5}-3-\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-3}{2\cdot\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Damit wird

$$x_n = \frac{\sqrt{5}+3}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\cdot\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Anhang B

Zeichenerklärungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{M}$	Menge der maßdefinierenden Funktionen auf $\mathbb{R}$, die in $(-\infty, 0)$ verschwinden
$\mathbb{B}$	Menge der nichtnegativen reellen Funktionen, die auf jedem Intervall der Form $[0, t]$ beschränkt sind
$\mathbb{I}^n$	Menge der links offenen und rechts abgeschlossenen Intervalle im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$
$\mathfrak{B}^n$	$:= \sigma(\mathbb{I}^n)$ "σ–Algebra der Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^n$"
$\overline{\mathbb{R}}$	$:= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\overline{\mathfrak{B}}$	$:= \{B, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty, +\infty\} \vert B \in \mathfrak{B}\}$
$\mathfrak{P}(M)$	Potenzmenge von M
$(a, b]$	$:= \{x \vert a < x \leq b\}$ „links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall“
$n!$	$:= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ „Fakultät von n“
$(N)_n$	$:= \frac{N!}{n!} = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)$ "n–te untere Faktorielle von N"
$\binom{n}{k}$	$:= \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ „n über k“
$F(a-0)$	meint den linksseitigen Limes von $F(a)$
$\uparrow$	konvergiert von unten gegen
$X \stackrel{d}{=} \mathrm{Exp}(\lambda)$	X ist exponential–verteilt
$X \stackrel{d}{=} Y$	X und Y sind identisch verteilt
$\Re(x)$	Realteil der komplexen Zahl x
$\Im(x)$	Imaginärteil der komplexen Zahl x
$O(n)$, $o(n)$	seien die Landau-Symbole.

Anhang C

Literatur

Stochastik III

Folgende Bücher werden als begleitende Literatur zum Teil III des Skriptes empfohlen:

- S. I. Resnick:
  Adventures in Stochastic Processes,
  Birkhäuser, Boston, 1992.
  ISBN:0817635912

- E. Cinlar:
  Introduction to stochastic processes,
  Prentice–Hall, 1975.

- S. Karlin/H.M. Taylor:
  A first course in stochastic processes,
  Academic Press, 1975.

- K.L. Chung:
  Markov Chains with stationary transition probabilities,
  Springer–Verlag, 1960.

- W.J. Anderson:
  Continuous–Time Markov Chains,
  Springer Verlag, Berlin, 1991.
  ISBN: 3540973699

- D. W. Stroock:
  An Introduction to Markov Processes,
  Springer-Verlag, Berlin, 2005.
  ISBN: 3540234993

Anhang D

Historie

In der folgenden Auflistung werden einige für die Entwicklung der Stochastik bedeutende Mathematiker mit ihren Lebensdaten und kurzen Beschreibungen ihrer Wirkungsfelder aufgeführt. Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere fehlen wichtige Mathematiker, die nicht direkt im Bereich der Stochastik gewirkt haben, durch ihre Arbeiten zur Maß- oder Integrationstheorie die moderne Stochastik aber erst ermöglichten.

- **Thomas Bayes**
  (∗ 1702 in London, England; † 17. April 1761 in Tunbridge Wells, Kent, England)

  Thomas Bayes studierte ab 1719 Theologie an der Universität in Edinburgh und beschäftige sich nebenbei mit Mathematik. 1733 wurde er Pfarrer der presbyterianischen Kapelle in Tunbridge Wells, 35 Meilen südöstlich von London. 1742 ernannte man Bayes zum Mitglied der Royal Society, obwohl der bis zu diesem Zeitpunkt noch keinerlei mathematische Arbeiten veröffentlich hatte. Insgesamt publizierte Bayes selbst nur 2 Arbeiten. Seine wichtigten Forschungsergebnisse, die unter anderem auch den später als ,,Formel von Bayes" benannten Satz enthielten, wurden erst aus seinem Nachlass bekannt.

- **Richard Ernest Bellman**
  (∗ 26. August 1920 in New York; † 19. März 1984 in Santa Monica, Californien)

  Bellman studierte bis 1943 am Brooklyn College (B.A.) sowie an der University of Wisconsin (M.A.) Mathematik. Danach arbeitete er 2 Jahre in Los Alamos in der theoretischen Physik. Seit 1965 lehrte er an der Universität von Southern California, Los Angeles, als Professor für Mathematik, Elektroingenieurwesen und Medizin.

  1953 stellte Bellman die Methode der dynamischen Programmierung auf, die für die Entscheidungstheorie sowie für die Variationsrechnung und optimale Steuerung wesentlich ist. Bellman beschäftige sich auch mit der Modellierung biologischer Prozesse und der Theorie der unscharfen Mengen.

- **Familie Bernoulli**
  Die schweizer Gelehrtenfamilie Bernoulli hat über mehrere Generationen hinweg sehr große Beiträge zur Mathematik geleistet.

  Im Folgenden werden nur die beiden Mitglieder der Bernoulli-Familie aufgeführt, die sich wesentlich mit stochastischen Fragestellungen beschäftigt haben. Insbesondere werden Jakob Bernoulli II, Johann Bernoulli I, Johann Bernoulli II, Johann Bernoulli III, Niklaus Bernoulli I und Niklaus Bernoulli II, die allesamt bedeutende Mathematiker waren, hier nicht näher erwähnt.

- **Daniel Bernoulli**
  (∗ 8. Februar 1700 in Groningen; † 17. März 1782 in Basel)

  Daniel Bernoulli interessierte sich hauptsächlich für Anwendungen der Mathematik. Er entwickelte das Prinzip zur Lösung algebraischer Gleichungen mit Hilfe von rekurrenten Reihen („Methode von Bernoulli") und untersuchte Kettenbrüche. Außerdem lieferte er wichtige Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie, die später teilweise von Laplace in seine Theorie aufgenommen wurden.
- **Jakob Bernoulli I**
  (∗ 27. Dezember 1654 in Basel; † 16. August 1705 in Basel)

  Jakob Bernoulli I ist der erste Gelehrte in der Familie der Bernoullis und überhaupt der erste bekannte Schweizer Mathematiker. Er befasste sich überwiegend mit analytischen Fragestellungen (er stand u.a. mit Leibniz, der gerade eine Infinitesimalmethoden aufgestellt hatte, in Kontakt), sowie mit stochastischen Problemen. Seine Arbeit baute auf den Ergebnissen von Huygens über das Glücksspiel auf. In einer erst nach seinem Tode durch seinen Neffen Niklaus Bernoulli I veröffentlichten Arbeit stellte Jakob Bernoulli I bereits das Gesetz der großen Zahlen auf und verallgemeinerte viele kombinatorische Ansätze von Huygens.

- **Emile Borel**
  (∗ 7. Januar 1871 Saint-Affrique; † 3. Februar 1956 in Paris)

  Borel beschäftige sich zunächst mit Funktionentheorie. Nach seiner Tätigkeit als Forschungsbeirat im Kriegsministerium von 1914–1918 übernahm er den Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Physik an der Sorbonne. Während seiner Arbeit in der Funktionentheorie präge Borel den Begriff des Maßes und der überabzählbaren Überdeckung. Ab 1905 befasste sich Borel mit den Nutzungsmöglichkeiten seiner Maßtheorie in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Außerdem ist Borel Mitbegründer der Spieltheorie und bewies das Minimax-Theorem für 3 Spieler.

- **Guido Fubini**
  (∗ 19. Januar 1879 in Venedig; † 6. Juni 1943 in New York)

  Zu den wichtigsten Arbeiten Fubinis gehört der 1907 von ihm bewiesene und später nach ihm benannte Satz. Darüber hinaus befasste sich Fubini mit projektiver Differentialgeometrie sowie der Theorie diskontinuierlicher Gruppen und automorpher Funktionen.

- **Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov**
  (∗ 25. April 1903 in Tambow; 20. Oktober 1987 in Moskau)

  Kolmogorov gilt als einer der bedeutensten Mathematiker der Gegenwart. Er befasste sich vorwiegend mit Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematischer Statistik und Logik, Maß- und Integrationstheorie, Funktionnalanalysis sowie Informations- und Algorithmentheorie. Nebenbei entwarf er Lehrpläne und Schulbücher für den Mathematikunterricht und prägte so zu großen Teilen den Mathematikunterricht in der Sowjetunion.

  Mit seiner Arbeit „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" von 1933 löste er das 6. Problem der berühmten 23 von Hilbert gestellten mathematischen Probleme.

- **Pierre Simon Marquis de Laplace**
  (∗ 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge; † 5. März 1827 in Paris)

  Laplace befasste sich sehr viel mit partiellen Differential– und Differenzengleichungen. Seine Entwicklung der Laplace-Transformation diente ihm dazu, Naturerscheinungen analytisch zu erfassen. Neben vielen Arbeiten zu physikalischen Themen befasste er sich mit Themen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Seine 1812 erschienene Theorie stellte eine umfassende Darstellung der damals bekannten Wahrscheinlichkeitstheorie dar. In ihr wurde der Begriff der Wahrscheinlichkeit definiert, sowie die mathematische Erwartung erörtert. Zudem greift Laplace in seiner Arbeit das von J. Bernoulli gefundene Gesetz der großen Zahlen auf.

  Auf Laplace geht auch die Idee zurück, dass das Geschehen in einem physikalischen System exakt vorherbestimmbar sei, wenn nur alle Anfangszustände bekannt sind („Laplacescher Determinismus").

  Laplace war neben seiner Tätigkeit als Forscher ab 1794 Vorsitzender der Kommission für Maße und Gewichte und unter Napoleon Bonaparte Minister des Inneren.

- **Henri Lebesgue**
  (∗ 28. Juni 1875 in Beauvais (Frankreich); † 26. Juli 1941 in Paris)

  Lebesgue erkannte, dass viele zu seiner Zeit gültigen Theorien für eine Reihe von Fragestellungen unzureichend waren. 1902 verallgemeinerte er den Riemannschen Integralbegriff zu dem wesentlich leistungsfähigeren Lebesgueschen Integral. Lebesgues Resultate wurden zunächst nur zögernd aufgenommen, stellen heute aber die Grundlage für die moderne Analysis dar.

- **Andrej Andrejewitch Markov**
  (∗ 14. Juni 1856 in Gouvernement Rjasan; † 20. Juli 1922 in Petrograd)

  Markov studierte von 1874–1878 unter anderem bei Tschebyscheff und beschäftigte sich zunächst hauptsächlich mit Fragestellungen der Zahlen– und Funktionentheorie. Später befasste er sich überwiegend mit Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dabei legte er wichtige Grundlagen zur Entwicklung der Theorie der stochastischen Prozesse. Außerdem entwickelte Markov die Theorie der später nach ihm benannten Markovschen Prozesse bzw. Ketten.

- **Pafnuti Lwowitch Tschebyscheff**
  (∗ 16. Mai 1821 in Okatowo; † 8. Dezember 1894 in Petersburg)

  Tschebyscheff befasste sich zunächst überwiegend mit Zahlentheorie. Unter anderem wirkte er an der Herausgabe der zahlentheoretischen Manusskripte Eulers mit. Später beschäftige er sich dann überwiegend mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen. Insbesondere erarbeitete er die Gesetzmäßigkeiten von Summen unabhängiger Summanden. Er verdeutlichte die Wichtigkeit solcher Begriffe wie Zufallsgröße oder Erwartungswert, verallgemeinerte das Gesetz der großen Zahlen und vereinfachte dessen Beweis erheblich.

- **Bernhard Georg Friedrich Riemann**
  (∗ 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg; † 20. Juli 1866 in Selasca in Italien)

Riemann studierte ab 1846 an der Universität in Göttingen zunächst Theologie und Philosophie, wechselte dann aber bald zur Mathematik. In seiner 1854 vorgelegten Habilitationsschrift führte Riemann das später nach ihm benannte Riemann-Integral ein. Neben der Integrationstheorie befasste er sich mit vielen weiteren mathematischen Gebieten. So forschte Riemann u.a. auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, sowie in der Zahlentheorie und der nichteuklidischen Geometrie. Die Ideen Riemanns sind bis heute von großer Bedeutung: Die Riemannsche Hypothese über die Nullstellen der ζ-Funktion wird in sehr vielen Sätzen der Zahlentheorie verwendet. Beweisen lies sich die Riemannsche Hypothese allerdings bis heute nicht.

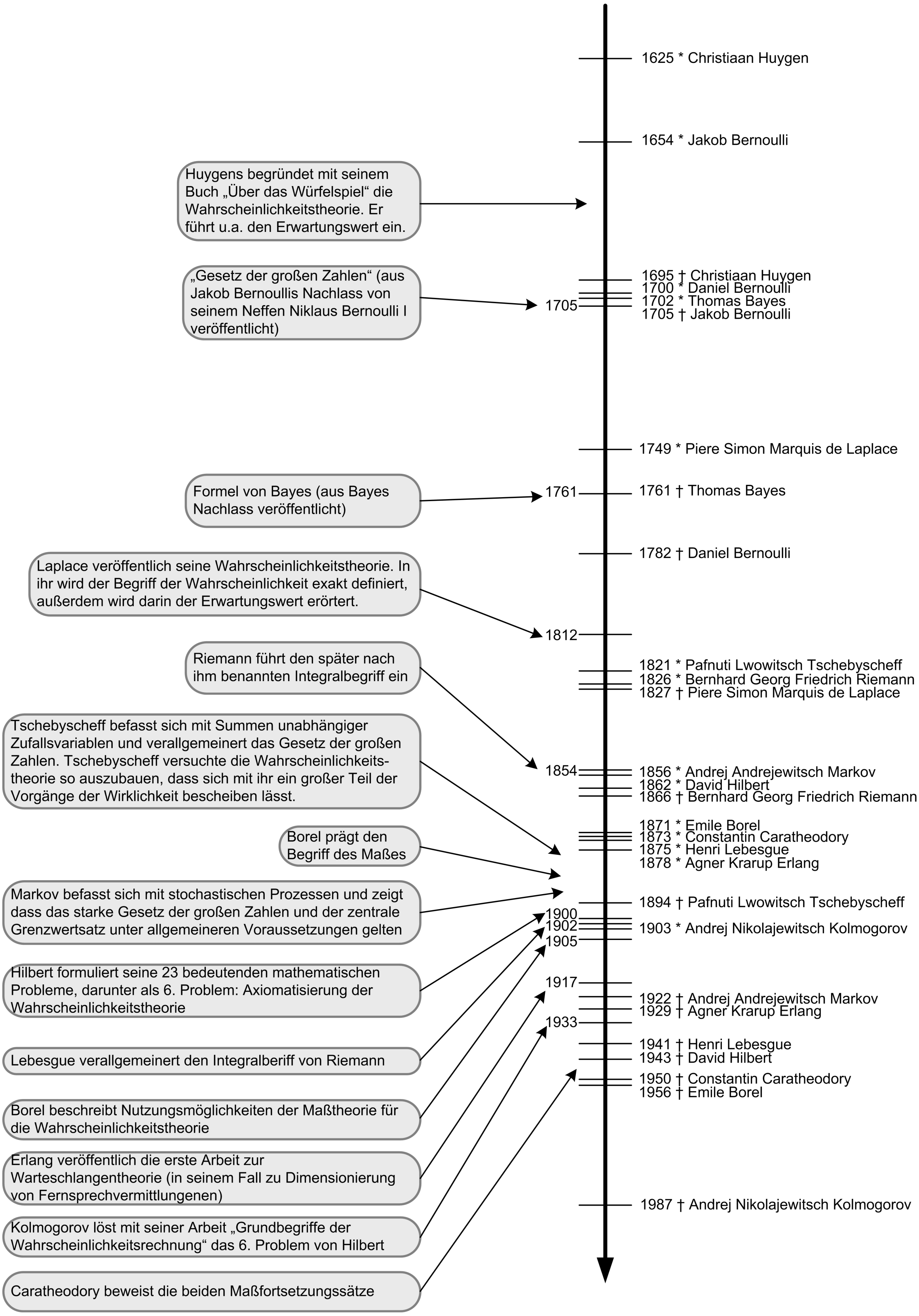
Weitere Informationen und diverse Biographien finden sich unter:

- S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote:
  Lexikon bedeutender Mathematiker,
  Verlag Harri Deutsch, Thun, 1990.
  ISBN: 3-8171-1164-9

- Turnbell Server, Biographies
  http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/

- Mathematik.ch: Bedeutende Mathematiker
  http://www.mathematik.ch/mathematiker/

- Wikipedia (Kategorie: Mathematiker)
  http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Mathematiker


1625 * Christiaan Huygen
1654 * Jakob Bernoulli
Huygens begründet mit seinem Buch „Über das Würfelspiel“ die Wahrscheinlichkeitstheorie. Er führt u.a. den Erwartungswert ein.
„Gesetz der großen Zahlen“ (aus Jakob Bernoullis Nachlass von seinem Neffen Niklaus Bernoulli I veröffentlicht)
1705
1695 † Christiaan Huygen
1700 * Daniel Bernoulli
1702 * Thomas Bayes
1705 † Jakob Bernoulli
1749 * Piere Simon Marquis de Laplace
Formel von Bayes (aus Bayes Nachlass veröffentlicht)
1761
1761 † Thomas Bayes
1782 † Daniel Bernoulli
Laplace veröffentlich seine Wahrscheinlichkeitstheorie. In ihr wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit exakt definiert, außerdem wird darin der Erwartungswert erörtert.
1812
Riemann führt den später nach ihm benannten Integralbegriff ein
1821 * Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff
1826 * Bernhard Georg Friedrich Riemann
1827 † Piere Simon Marquis de Laplace
Tschebyscheff befasst sich mit Summen unabhängiger Zufallsvariablen und verallgemeinert das Gesetz der großen Zahlen. Tschebyscheff versuchte die Wahrscheinlichkeits-theorie so auszubauen, dass sich mit ihr ein großer Teil der Vorgänge der Wirklichkeit bescheiben lässt.
1854
1856 * Andrej Andrejewitsch Markov
1862 * David Hilbert
1866 † Bernhard Georg Friedrich Riemann
Borel prägt den Begriff des Maßes
1871 * Emile Borel
1873 * Constantin Caratheodory
1875 * Henri Lebesgue
1878 * Agner Krarup Erlang
Markov befasst sich mit stochastischen Prozessen und zeigt dass das starke Gesetz der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz unter allgemeineren Voraussetzungen gelten
1894 † Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff
1900
1902
1905
1903 * Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov
Hilbert formuliert seine 23 bedeutenden mathematischen Probleme, darunter als 6. Problem: Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie
1917
1922 † Andrej Andrejewitsch Markov
1929 † Agner Krarup Erlang
1933
Lebesgue verallgemeinert den Integralberiff von Riemann
1941 † Henri Lebesgue
1943 † David Hilbert
1950 † Constantin Caratheodory
1956 † Emile Borel
Borel beschreibt Nutzungsmöglichkeiten der Maßtheorie für die Wahrscheinlichkeitstheorie
Erlang veröffentlich die erste Arbeit zur Warteschlangentheorie (in seinem Fall zu Dimensionierung von Fernsprechvermittlungenen)
1987 † Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov
Kolmogorov löst mit seiner Arbeit „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ das 6. Problem von Hilbert
Caratheodory beweist die beiden Maßfortsetzungssätze

Stichwortverzeichnis