

## Stochastische Modelle in den Ingenieurwissenschaften Diffusionsapproximation und Dekomposition von Warteschlangennetzen mit Batch-Processing

Prof. Dr. Th. Hanschke, Dr. H. Zisgen, Dipl. Wirt.-Inf. W. Klünder

### Motivation

Das Entstehen von Warteschlangen ist aus betriebswirtschaftlicher Sicht ein Effekt, der möglichst vermieden bzw. minimiert werden sollte. Eine Warteschlange in einer Produktion bedeutet, dass sich der Produktionsvorgang durch Wartezeiten verlängert, was zu steigenden Lagerhaltungskosten bzw. gebundenem Material führt. Im Endeffekt verteuern sich die Endprodukte und das Unternehmen büßt Wettbewerbsvorteile ein.

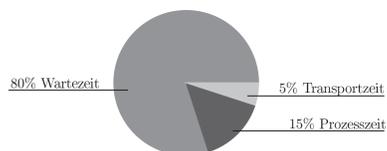


Abbildung 1: Typisches Durchlaufzeit-Profil in Technologie-Linien

Abbildung 1 zeigt ein typisches Durchlaufzeit-Profil eines Fertigungsprozesses in einer Technologie-Linie, beispielsweise in einer Halbleiterfabrik. Es ist klar ersichtlich, dass die Wartezeit eines Bauteils den größten Anteil an der Durchlaufzeit aufweist und der Bedarf einer Optimierung im Sinne einer Minimierung der Wartezeit den größten Effekt auf die gesamte Durchlaufzeit und der zeitlichen Verkürzung des Produktionsprozesses haben wird.

### Warteschlangensysteme

Als Optimierungsansatz wird die analytisch orientierte Methode der Warteschlangentheorie genutzt mit deren Hilfe die jeweilige Fragestellung mathematisch modelliert werden kann. Die besondere Herausforderung besteht darin, dass für viele Warteschlangenmodelle aufgrund ihrer Komplexität keine geschlossene analytische Lösung bekannt ist. Allgemeine Multi-Class-Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienung (Abbildung 2) besitzen ein hohes Maß an Komplexität und sind Untersuchungsgegenstand des Projekts.

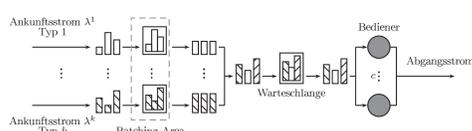


Abbildung 2: Multi-Class- $GI^X/GI^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem

Wegen der hohen Komplexität muss auf Approximationsverfahren zurückgegriffen werden. Die Ergebnisse der Approximationsverfahren werden anschließend mittels stochastisch ereignisorientierter Simulation überprüft.

### Approximationsverfahren

Im Fokus steht zum einen die Approximationsformel von Allen und Cunneen, welche bereits für Multi-Class- $GI^X/GI^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensysteme in der jüngeren

Vergangenheit entwickelt wurde. Die Approximation von Allen und Cunneen wurde durch empirische Analysen gefunden, wobei die Formel eine Erweiterung der Approximationsformel von Martin für weniger komplexe  $M/G/c$ -Systeme darstellt.

Zum anderen werden Multi-Class- $GI^X/GI^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensysteme mit Hilfe der Diffusionsapproximation untersucht. Die Diffusionsapproximation wurde bisher nur für allgemeine Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienung erforscht, jedoch nicht für den Mehr-Produkt-Fall. Die Grundidee des Approximationsansatzes ist es, dass der mathematisch schwer zugängliche stochastische Prozess der Anzahl an Kunden im System durch einen Diffusionsprozess (Brownsche Bewegung) approximiert wird, welcher eine approximative Lösung ermöglicht.

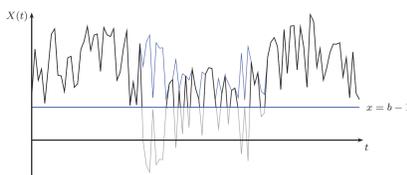


Abbildung 3: Brownsche Bewegung mit absorbierender Schranke und sofortiger Rückkehr

Beiden Approximationen ist gemein, dass sie bekanntlich nur zuverlässige Ergebnisse liefern, wenn die zu untersuchenden Warteschlangenmodelle eine hohe Auslastung besitzen. D. h., dass die Bedienstationen nahezu durchgängig beschäftigt sind, was in der Praxis meistens angestrebt wird.

### Warteschlangennetze

In sehr vielen Fällen lässt sich ein Produktionsprozess nur über mehrere miteinander verbundene Warteschlangensysteme modellieren. Derartige Konstruktionen werden Warteschlangennetze genannt. Warteschlangennetze, die aus Multi-Class- $GI^X/GI^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystemen bestehen, sind Untersuchungsgegenstand des Projekts.

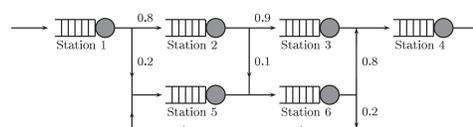


Abbildung 4: Beispiel für ein Warteschlangennetz

Die Besonderheit von Warteschlangennetzen besteht darin, dass der Abgangsstrom eines Warteschlangensystems der Ankunftsstrom der direkt nachfolgenden Warteschlangensysteme bildet. Darüber hinaus müssen bei Verzweigungen Übergangswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden.

Um dennoch die zuvor beschriebenen Approximationsverfahren verwenden zu können, wird die Dekompositionsmethode genutzt, die eine separierte approximative Lösung der einzelnen Multi-Class- $GI^X/GI^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensysteme ermöglicht.

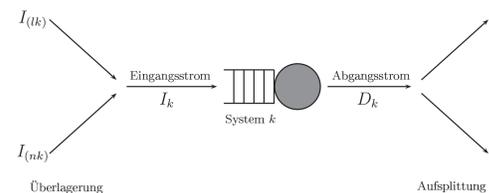


Abbildung 5: Dekompositionsmethode

Die Dekompositionsmethode lässt sich in die Schritte approximative Bildung der Ankunftsströme der einzelnen Warteschlangensysteme, Aufspaltung der Ankunftsströme gemäß den Verzweigungen des Netzes und Überlagerung der Ströme zu einem Ankunftsstrom unterteilen.

### Forschungsaufgaben

Ein Ziel des Projekts ist es, die Diffusionsapproximation für allgemeine Multi-Class-Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienung weiterzuentwickeln. Dazu werden bereits existierende Ansätze der Diffusionsapproximation für allgemeine Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienung genutzt, wobei eine Betrachtung des Approximationsverfahrens über den traditionellen Ansatz und einen allgemeineren Ansatz über stochastische Differentialgleichungen erfolgt.

Im zweiten Schritt werden die erzielten Ergebnisse für Ein-Produkt-Warteschlangennetze auf Multi-Class-Warteschlangennetze übertragen. Dies schließt die Weiterentwicklung der Dekompositionsmethode für den Multi-Class-Fall und eine Aggregation über alle Produktklassen ein.

Eine Bewertung der Ergebnisse der approximativen Ansätze erfolgt den Vergleich mit den Ergebnissen, welche durch die ereignisgesteuerte stochastische Simulation gewonnen werden.

Am Ende des Projekts soll ein Tool für die operative warteschlangentheoretische Optimierung von Produktionsprozessen stehen, wobei insbesondere auf eine gute Performance sowie ausreichend Schnittstellenmöglichkeiten geachtet wird. Zudem ist eine graphische Aufbereitung der berechneten Ergebnisse nützlich, um die gewonnene Information für den Nutzer zugänglicher zu gestalten und ihm eine schnellere Interpretation der Daten zu erlauben.