TU Clausthal

Stochastische Matrizen und Markoff-Ketten

Prof. Dr. Michael Kolonko

23. September 2009

Stochastische Modelle

- Zufallsexperimente:
  Würfel werfen, Stichprobe ziehen, Lebensdauer, Marktgeschehen, ...
- Zufallsvariable $X, Y, Z, \ldots$ auf einem W.-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$
- Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse:
  $P(X{=}5)$ = W. eine 5 zu würfeln; $P(X{\leq}\ 10000)$ = W. Lebensdauer ≤ 10000
- Unabhängigkeit von X, Y:
  zweimal Würfeln, n-mal Ziehen mit Zurücklegen
- Wiederholen von Experimenten:
  $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt
- X, Y unabhängig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{P}(X{=}i, Y{=}j) = \mathrm{P}(X{=}i) \cdot \mathrm{P}(Y{=}j)$
  gemeinsame Verteilung = Produkt der Randverteilungen
- Abhängigkeit: gemeinsame Verteilung **mehr** als Produkt der Randverteilungen

… stochastische Modelle

- Abhängigkeit:
  - ▶ X_1, X_2 unabhängige Würfelergebnisse:
    $\mathrm{P}(X_1{=}3,\ X_2{=}5) = \mathrm{P}(X_1{=}3)\cdot \mathrm{P}(X_2{=}5) = 1/36$
  - ▶ $Y := X_1{+}X_2$ Augensumme: Y, X_1 nicht unabhängig
    $X_1 = 5 \ \Rightarrow\ Y \geq 6, \qquad Y = 3 \ \Rightarrow\ X_1 = 1$ oder $X_1 = 2$
    $\mathsf{P}\,(X_1 = 5, Y = 3) \ = \ 0 \ \neq \ \mathsf{P}\,(X_1 = 5)\cdot\mathsf{P}\,(Y = 3) \ = \ 1/6\cdot 2/36$
- Bedingte Verteilung $\mathrm{P}[Y{=}j \,|\, X{=}i]$

  Maß für die verbleibende Unsicherheit über $Y{=}j$ bei $X{=}i$

  $$\mathsf{P}\,[Y = j \mid X = i] \ = \ \frac{\mathsf{P}\,(Y = j, X = i)}{\mathsf{P}\,(X = i)}$$

  ≈ rel. Häufigkeit von $X{=}i$ und $Y{=}j$ unter allen mit $X{=}i$

  - ▶ $\mathsf{P}(X = i, Y = j) \ = \ \mathsf{P}[Y = j \mid X = i]\cdot\mathsf{P}(X = i)$
  - ▶ X, Y unabhängig ⇒ $\mathsf{P}\,[Y = j \mid X = i] \ = \ \mathsf{P}\,(Y = j)$
- $$\mathsf{P}(Y = j) \ = \ \sum_i \mathsf{P}(Y = j, X = i) \ = \ \sum_i \mathsf{P}[Y = j \mid X = i]\cdot\mathsf{P}(X = i)$$

  Satz von der totalen W.

Beispiel

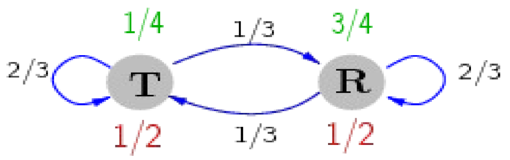
- Wetter : T (trocken), R (Regen)
- X := Wetter heute, Y := Wetter morgen
- Erfahrung : W. 'Wetter bleibt' = 2/3 : $\mathsf{P}[Y = j \mid X = j] \ = \ 2/3$
  W. 'Wetter ändert sich' = 1/3 : $\mathsf{P}[Y \neq j \mid X = j] \ = \ 1/3$ $\quad j \in \{\mathsf{T}, \mathsf{R}\}$
- Vermutung: $\mathsf{P}(X = \mathsf{T}) \ = \ 1/4; \quad \mathsf{P}(X = \mathsf{R}) \ = \ 3/4$
- Wie wird das Wetter morgen: $\mathrm{P}(Y{=}\mathsf{T}) = $?

  $$\begin{aligned}\mathsf{P}(Y = \mathsf{T}) \ &= \ \mathsf{P}[Y = \mathsf{T} \mid X = \mathsf{T}]\cdot\mathsf{P}(X = \mathsf{T}) \ + \ \mathsf{P}[Y = \mathsf{T} \mid X = \mathsf{R}]\cdot\mathsf{P}(X = \mathsf{R}) \\ &= 2/3\cdot 1/4 \ + \ 1/3\cdot 3/4 \ = \ 5/12 \ > \ 1/4 \ = \ \mathsf{P}(X = \mathsf{T})\end{aligned}$$

- Z Wetter übermorgen: $\mathrm{P}(Z{=}\mathsf{T}) = $?

  $$\begin{aligned}\mathsf{P}(Z = \mathsf{T}) \ &= \textstyle\sum_{j\in\{\mathsf{T},\mathsf{R}\}} \mathsf{P}[Z = \mathsf{T} \mid Y = j]\cdot\mathsf{P}(Y = j) \\ &= 2/3\cdot 5/12 + 1/3\cdot 7/12 \ = \ 17/36 \ > \ 5/12 = \mathsf{P}(Y = \mathsf{T})\end{aligned}$$

	heute	morgen	ümorgen	+ 3	+ 4	∞
R	3/4	7/12	19/36	55/108	163/324	1/2
T	1/4	5/12	17/36	53/108	161/324	1/2



Stochastische Prozesse

- Zufälliger Verlauf, zu Zeitpunkten $n = 0,1,2,\ldots$
  X_n 'Zustand' zum Zeitpunkt n
  - X_n = n-te Wdh eines Versuchs :
    $X_0, X_1, X_2 \ldots$ unabhängig und identisch verteilt ⇒ Grenzwertsätze
  - X_n = Aktienkurs am n-ten Tag: X_n hängt ab von $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$
- $X_0, X_1, X_2, \ldots$ heißt **Markoff-Kette,** falls
  X_{n+1} hängt nur ab von X_n, nicht von $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$

$$\mathsf{P}[X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n] \;=\; \mathsf{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i_n]$$

Zukunft | Vergangenheit | Gegenwart   Zukunft | Gegenwart

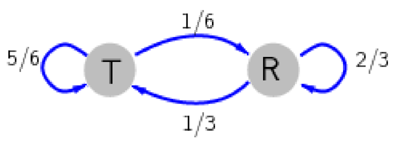
Prozess hat kurzes Gedächtnis

Übergangswahrscheinlichkeit : $P(i,j) := \mathsf{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$

Beispiel

- X_n Wetter am n ten Tag

Übergangsgraph



$$\begin{aligned}
P(T,T) &:= \mathsf{P}[X_{n+1} = T \mid X_n = T] = 5/6\\
P(T,R) &:= \mathsf{P}[X_{n+1} = R \mid X_n = T] = 1/6\\
P(R,R) &:= \mathsf{P}[X_{n+1} = R \mid X_n = R] = 2/3\\
P(R,T) &:= \mathsf{P}[X_{n+1} = T \mid X_n = R] = 1/3
\end{aligned}$$

- **Übergangsmatrix** : $P = \big(P(i,j)\big)_{i,j\in S}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad S = \{T, R\}$

$$\sum_{j\in S} P(i,j) \;=\; \sum_{j\in S} \mathsf{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] \;=\; \mathsf{P}[X_{n+1} \in S \mid X_n = i] \;=\; 1$$

- Wetter morgen, falls heute $\mathbf{P}(X_n = j)$: Zustandsverteilung

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = T) = \sum_{i=T,R} \mathsf{P}[X_{n+1} = T \mid X_n = i]\cdot \mathsf{P}(X_n = i) = \sum_{i\in S} P(X_n = i)\cdot P(i,T)$$

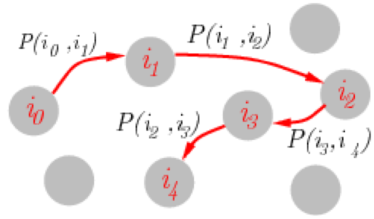
i -te Komponente von p_n

- SpaltenVektor p_n der Länge $|S|$, $p_n(i) := \mathsf{P}(X_n = i), \quad i \in S$

$$p_{n+1}(j) \;=\; \mathsf{P}(X_{n+1} = j) \;=\; \sum_{i\in S} p_n(i)\cdot P(i,j) \;=\; p_n^T P\,(j)$$

Mehrschritt - ÜW

- $X_0, X_1, \ldots$ Markoff-Kette mit Übergangsmatrix P
- **Pfad** $i_1, i_2, \ldots, i_n$ bei Start in i_0



$$\mathsf{P}[X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0]$$
$$= \mathsf{P}(i_0, i_1) \cdot \mathsf{P}(i_1, i_2) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(i_{n-1}, i_n)$$

- Wetter in 2 Tagen ?

$$\mathsf{P}[X_2 = T \mid X_0 = T]$$
$$= \mathsf{P}[X_1 = R, X_2 = T \mid X_0 = T] + \mathsf{P}[X_1 = T, X_2 = T \mid X_0 = T]$$
$$= 1/6 \cdot 1/3 + 5/6 \cdot 5/6 = 27/36$$
$$= P(T, R) \cdot P(R, T) + P(T, T) \cdot P(T, T)$$
$$= \sum_{j \in S} P(T, j) \cdot P(j, T)$$
$$= P^2(T, T)$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

… Mehrschritt-ÜW

- Wetter in 3 Tagen:

$$\mathsf{P}[X_3 = T \mid X_0 = T] = \sum_{j \in \{T,S\}} \mathsf{P}[X_3 = T \mid X_2 = j] \cdot \mathsf{P}[X_2 = j \mid X_0 = T]$$
$$= \sum_{j \in \{T,S\}} P(j, T) \cdot P^2(T, j) = P^3(T, T)$$

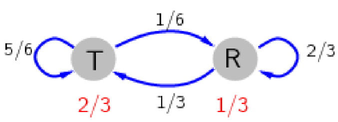
- Allgemein: $\mathsf{P}[X_n = j \mid X_0 = i] = P^n(i, j)$

  = W. bei Start in i nach n Schritten in j zu sein

- $n \to \infty$?

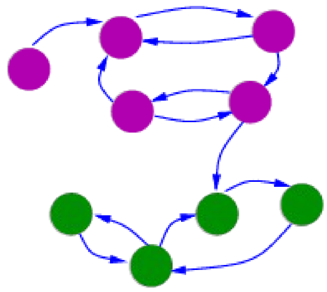
$$P = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/64 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P^3 = \begin{pmatrix} 0.708 & 0.291 \\ 0.583 & 0.415 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.687 & 0.312 \\ 0.625 & 0.375 \end{pmatrix} \qquad P^5 = \begin{pmatrix} 0.677 & 0.322 \\ 0.645 & 0.3545 \end{pmatrix} \qquad P^{10} = \begin{pmatrix} 0.6669 & 0.330 \\ 0.6660 & 0.3339 \end{pmatrix}$$



alle Zeilen identisch
⇒ Grenzwert unabhängig von Startzustand

Rekurrenz



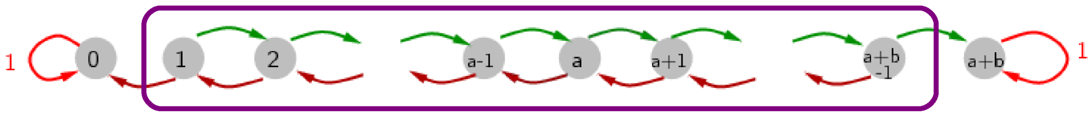
wird irgendwann verlassen: **transient**

wird irgendwann betreten und nicht wieder verlassen: **rekurrent**

- $\lim_{n\to\infty} P^n(i,\bullet) \;=\; 0, \qquad i \in S$
- $\lim_{n\to\infty} P^n(i,\bullet) \;=\; \pi(\bullet) > 0, \qquad i \in S$

Beispiel: Gambler's Ruin

- Zwei Spieler: A und B, starten mit a bzw. b Euro
- setzen pro Runde je einen Euro
- Bei „Adler" gewinnt A den Einsatz, bei „Kopf" B
- X_n := Kapital von A nach der n-ten Runde



$$P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q

faire Münze:
P[A $verliert \mid X_0 = a$] $= \dfrac{b}{a+b}$

- Dauer des Spiels im Mittel: Zeilensumme von $(I - \square)^{-1}$

Gambler's Ruin

$$(I-Q) \;=\; \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} - \left(\boxed{\begin{matrix}0&0.5&0&0\\0.5&0&0.5&0\\0&0.5&0&0.5\\0&0&0.5&0\end{matrix}}\right) = \begin{pmatrix}1&-.5&0&0\\-0.5&1&-0.5&0\\0&-0.5&1&-0.5\\0&0&-0.5&1\end{pmatrix}$$

$$(I-Q)\;(I-Q)^{-1} \;=\; I$$

$$(I-Q)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix}1.6&1.2&0.8&0.4\\1.2&2.4&1.6&0.8\\0.8&1.6&2.4&1.2\\0.4&0.8&1.2&1.6\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}8&6&4&2\\6&12&8&4\\4&8&12&62\\2&4&6&8\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}4\\6\\6\\4\end{matrix}$$

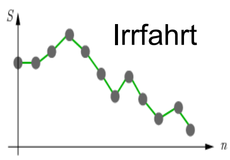
- mittlere Dauer des Spiels bei $a+b=5$:

a	1	2	3	4
	4	6	6	4

- W., dass es mit Ruin von A / B endet:

$$P \;=\; \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0.5&0&0.5&0&0&0\\0&0.5&0&0.5&0&0\\0&0&0.5&0&0.5&0\\0&0&0&0.5&0&0.5\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(I-Q)^{-1}\;\boxed{}\,\boxed{} \;=\; \begin{pmatrix}0.8&0.2\\0.6&0.4\\0.4&0.6\\0.2&0.8\end{pmatrix}$$



Stationäre Verteilungen

- unter geeigneten Vor. : $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(i,j) \;=:\; \pi(j)$
- π ist W.-Verteilung auf S , $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n = j) \;=\; \pi(j)$
- was passiert für $\mathsf{P}(X_0 = j) \;=\; \pi(j), \quad j \in S$
- nichts : $\mathsf{P}(X_1 = j) \;=\; \mathsf{P}(X_0 = j) \;=\; \pi(j)$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_{n+1} = j) \;&=\; \sum_{i\in S} \mathsf{P}(X_n = i)\cdot \mathsf{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] \;=\; \sum_{i\in S} \pi(i)\cdot P(i,j)\\ &=\; \pi^T P(j) \;=\; \sum_{i\in S}\Big(\lim_{m\to\infty} P^m(\cdot,i)\Big)^T \cdot P(i,j) \;=\; \lim_{m\to\infty} P^{m+1}(\cdot,j)\\ &=\; \pi(j)\end{aligned}$$

- **stationäre Verteilung** π $\quad \pi^T P \;=\; \pi^T$ lineares Gleichungssystem

$$\pi^T P = \begin{pmatrix}\pi(T) & \pi(R)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5/6 & 1/6\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix} = \pi^T \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}5/6\,\pi(T) + 1/3\,\pi(R)\\ 1/6\,\pi(T) + 2/3\,\pi(R)\end{matrix} \overset{!}{=} \begin{matrix}\pi(T)\\ \pi(R)\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \pi(T) = 2/3,\;\; \pi(R) = 1/3$$

... stationäre Verteilung

- abhängig vom Wetter: Energieverbrauch $f(\,X_n\,)$
- durchschnittlicher Verbrauch: $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) \;=\sum_{i\in S} \pi(i)\cdot f(i) \;=: \;\pi^T f$
- z.B.: $f(T)=1,\ f(R)=2$

$$\pi^T f \;=\; \pi(T)f(T)+\pi(R)f(R) \;=\; 2/3\cdot 1+1/3\cdot 2 \;=\; 4/3$$

Zusammenfassung

- Matrix P — ÜbergangsW. $i\to j$
- $p_n P = p_{n+1}$ — Zustandsverteilungen
- $p_n P^m \;=\; p_{n+m}$ — MehrschrittÜW
- $\lim_{m\to\infty} P^m \;=\; \pi$ — stationäre Verteilung
- $\pi^T \;=\; \pi^T P$ — lineares Gleichungssystem
- $\pi^T f \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)$ — Ergodensatz