Matrizen: Theorie und Anwendungen

Einführungsvortrag der

Lehrerfortbildung am 23. September 2009

Markoff-Ketten, Call-Center und Google's PageRank:
Zur Theorie und Anwendungen von Matrizen

von Harm Pralle
Institut für Mathematik
Technische Universität Clausthal

Inhalt

Der Vektorraum der $(m \times n)$-Matrizen

Für Körper $\mathbb{K}$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ heißt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$ eine $(m \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$.

Mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \\ kA &= (ka_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

ist die Menge $\mathbb{K}^{m\times n}$ der $(m \times n)$-Matrizen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

Matrizenmultiplikation

Für $A=(a_{ij})\in\mathbb{K}^{m\times n}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ ist

$$A\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_j \end{pmatrix}\in\mathbb{K}^m\ .$$

Das Produkt von $A=(a_{ij})\in\mathbb{K}^{m\times l}$ und $B=(b_{ij})\in\mathbb{K}^{l\times n}$ ist $AB=C=(c_{ij})\in\mathbb{K}^{m\times n}$ mit

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\quad\text{für } 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\ .$$

Rechengesetze

Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ: Für $A \in \mathbb{K}^{m\times h}$, $B \in \mathbb{K}^{h\times l}$ und $C \in \mathbb{K}^{l\times n}$ gilt $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Sie ist aber nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gelten die Distributivgesetze: Für $A, B \in \mathbb{K}^{m\times h}$ und $C, D \in \mathbb{K}^{h\times n}$ gelten

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= (A \cdot C) + (B \cdot C) \in \mathbb{K}^{m\times n} \\ A \cdot (C + D) &= (A \cdot C) + (A \cdot D) \in \mathbb{K}^{m\times n} \end{aligned}$$

Algebraisch abgeschlossene Struktur

Auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist die Matrizenmultiplikation abgeschlossen und macht $\mathbb{K}^{n\times n}$ zu einer assoziativen $\mathbb{K}$-Algebra und zu einem Ring.

Das neutrale Element der Multiplikation ist die Einheitsmatrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Multiplikation $[A,B] = A\cdot B - B\cdot A$ für $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$ wird $\mathbb{K}^{n\times n}$ eine Lie-Algebra.
(= Vektorraum mit Mult. $[*,*]$, die der Jacobi-Identität genügt:

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0)\ .$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn ein $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert mit

$$A \cdot A^{-1} = I_n \ .$$

Dann besitzt die lineare Abb. A eine Umkehrabbildung, d.h.

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(A) &= \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = \{0\} \\ \Leftrightarrow \ \mathrm{Rang}(A) &= \dim(\mathrm{Zeilenraum}(A)) = \dim(\mathrm{Spaltenraum}(A)) = n \\ \Leftrightarrow \ \det(A) &\neq 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine lineare Gruppe der Dim. n über dem Körper $\mathbb{K}$ ist

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\} \ .$$

Die Determinante

Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften, wobei $z_1, \dots, z_n, z$ Zeilenvektoren seien:

- det ist multilinear: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\det\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i + \mu z \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \lambda \det\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) + \mu \det\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right)$$

- $\mathrm{Rang}(A) < n \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0$
- $\det(I_n) = 1$

Berechnung der Determinante

Man berechnet die Determinante von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit

- dem Gauß-Algorithmus,
- der Leibnizschen Determinantenformel

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

- oder dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der j-ten Spalte bzw. i-ten Zeile

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \,.\end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem

Lineares Gleichungssystem über einem Körper $\mathbb{K}$ mit m Gleichungen in n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \text{ für } i = 1 \ldots, m$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $Rang(A) = Rang(A|b)$.

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ heißt homogen, falls $b = 0$, sonst inhomogen.

Die Lösungsmenge $L(A, b)$

Für die Lösungsmenge

$$L(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$$

des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gilt:

- $L(A, 0)$ *ist ein Unterraum von* $\mathbb{K}^n$*.*
- $L(A, b)$ *ist die Nebenklasse* $x_0 + L(A, 0)$ *von* $L(A, 0)$ *für eine spezielle Lösung* x_0 *des inhomogenen LGS* $Ax = b$*.*

Der Gauß-Algorithmus

Elementare Zeilenumformungen

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

angewendet auf die Matrix $(A|b)$ verändern die Lösungsmenge $L(A,b)$ des zugehörigen LGS nicht. Mit Hilfe des

- Vertauschens von Spalten

formt der Gauß-Algorithmus die Matrix $(A|b)$ um:

$$(A|b) \overset{\text{Gauß-Alg.}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} I_r & C & b' \\ 0 & 0 & b'' \end{pmatrix} \quad \text{mit } C \in \mathbb{K}^{r\times(n-r)}$$

$$L'(A,0) = \left\langle \begin{pmatrix} -C \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \right\rangle,\; L'(A,b) = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -C \\ I_{n-r} \end{pmatrix} \right\rangle$$

(Spaltentausch beachten!)

Definition

Für $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W heißt eine Abb. $f : V \to W$ linear, wenn

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) && \text{für alle } u, v \in V \\ f(kv) &= kf(v) && \text{für alle } k \in \mathbb{K}, v \in V \ . \end{aligned}$$

V, W seien $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abb.

f ist eindeutig durch die Bilder einer Basis B von V festgelegt.

$$\left(\quad v = \sum_{b \in B} v_b b \in V \quad \Rightarrow \quad f(v) = \sum_{b \in B} v_b f(b) \quad \right)$$

Darstellungsmatrizen

V, W seien $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abb.

f ist eindeutig durch die Bilder einer Basis B von V festgelegt.

Sind $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ Basen von V bzw. W, so ist f eindeutig durch die Koeffizienten a_{ij} gegeben:

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

Die Darstellungsmatrix von f bezüglich B und C ist

$$D_C^B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Matrizen induzieren lineare Abbildungen

Umgekehrt induziert jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f_A(v) = Av$. Denn für $u, v \in \mathbb{K}^n$ und $k \in \mathbb{K}$ gelten:

$$\begin{aligned} f_A(u+v) &= A(u+v) = Au + Av = f_A(u) + f_A(v) \\ f_A(kv) &= A(kv) = k(Av) = kf_A(v) \end{aligned}$$

Für $A \in \mathbb{K}^{m \times l}$, $B \in \mathbb{K}^{l \times n}$ induziert das Produkt $A \cdot B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die Komposition $f_A \circ f_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ der linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f_B} \mathbb{K}^l \xrightarrow{f_A} \mathbb{K}^m$.

Eigenwerte, -vektoren und -räume

Endomorphismus: Lineare Abb. eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V in sich

f sei ein Endomorphismus eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V in sich.

- Eigenwert von f: $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{0\}$
- Eigenvektor zum Eigenwert λ: $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$
- Eigenraum von f zum Eigenwert λ:

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$$

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$$

Diagonalisierbarkeit

Existiert eine Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V aus Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist

$$D_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

f heißt diagonalisierbar, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f hat. Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$\operatorname{Kern}(A) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Rang}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0$$

Der von A induzierte Endomorphismus hat $\lambda \in \mathbb{K}$ als Eigenwert genau dann, wenn $\operatorname{Kern}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ bzw. $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

$\Rightarrow$ *Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$.*

Bilinearformen

V sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Bilinearform von V ist eine Abbildung $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ mit

$$\beta(hu + kv, w) = h\beta(u, w) + k\beta(v, w)$$
$$\beta(u, hv + kw) = h\beta(u, v) + k\beta(u, w) \qquad \text{für alle } h, k \in \mathbb{K},\ u, v, w \in V$$

Für eine Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V beschreibt die Gram-Matrix $M = (\beta(b_i, b_j)) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eindeutig die Bilinearform β.

$$\left(u = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i \quad , \quad v = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \right.$$

$$\left. \Rightarrow \beta(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i \beta(b_i, b_j) v_j = (u_1, \ldots, u_n)\, M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right)$$

Euklidische Vektorräume

V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ von V ist ein Skalarprodukt, wenn β

- symmetrisch ($\beta(u, v) = \beta(v, u)$),
- nicht ausgeartet ($\beta(u, v) = 0$ für alle $v \in V \Rightarrow u = 0$) und
- positiv definit ($\beta(u, u) > 0$ für alle $u \in V \setminus \{0\}$) ist.

Euklidischer Vektorraum: $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt

Mit einem Skalarprodukt können Vektoren auch durch Längen und Richtungen beschrieben werden.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Gram-Matrix eines Skalarprodukts genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(A) = n$ gilt und A symmetrisch und positiv definit ist.

$A = (a_{ij})$ positiv definit $\Leftrightarrow \det((a_{ij})_{1\le i,j\le k}) > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$

Graphen und Adjazenzmatrizen

Ungerichteter Graph: $\Gamma = (E, K)$ mit Eckenmenge E und Kantenmenge $K \subseteq \{\{a, b\} \mid a, b \in E\}$.

Gerichteter Graph: $\Gamma = (E, K)$ mit Eckenmenge E und Kantenmenge $K \subseteq \{(a, b) \mid a, b \in E\}$.

Adjazenzmatrix eines endlichen Graphen Γ, d.h. $|E| = n \in \mathbb{N}$:
$A(\Gamma) = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 1$ genau dann, wenn $(i, j) \in K$.

(Stark) reguläre Graphen

Für ungerichtete Graphen definiert man:

Valenz einer Ecke: Anzahl der Kanten durch die Ecke

Regulärer Graph: Alle Ecken haben dieselbe Valenz k.
$\Rightarrow$ $(1, 1, \ldots, 1)^T$ ist Eigenvektor von $A(\Gamma)$ zum Eigenwert k.

Stark regulärer Graph: Regulärer Graph, so dass je 2 benachbarte Ecken genau a gemeinsame Nachbarn und je zwei nichtbenachbarte Ecken genau b gemeinsame Nachbarn haben.

Ein Graph Γ ist genau dann stark regulär, wenn $A(\Gamma)$ höchstens drei Eigenwerte hat.

$$\left(\qquad A^2 = kI_n + aA + b(J_n - I_n - A) \qquad \right)$$

Der Petersen-Graph P

ist stark regulär mit $k = 3$, $a = 0$ und $b = 1$.

$$A(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (x-3)(x-1)^5(x+2)^4$$

Eigenvektorbestimmung einer Adjazenzmatrix

$\Gamma = (E, K)$ sei ein Graph mit $|E| = n$ und Adjazenzmatrix A.

$v \in \mathbb{R}^n$ weist als Funktion in $\mathbb{R}^E$ jeder Ecke eine reelle Zahl zu.

$$(Av)(e) = \sum_{(f,e)\in K} v(f)$$

v ist ein Eigenvektor von A, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lambda v(e) = \sum_{(f,e)\in K} v(f) \text{ für alle } e \in E.$$

Algorithmische Gruppentheorie

Eine Kompositionsreihe einer Gruppe G ist eine Subnormalreihe

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G$$

wobei G_k/G_{k-1} einfach ist. In der Computeralgebra erhält man damit effiziente Darstellungen von Gruppen.

Für eine als Erzeugnis einer Menge X gegebenen Gruppe $G = \langle X \rangle$ sind die Aufgaben der algorithmischen Gruppentheorie u.a.:

- Wort-Problem: Stelle $g \in G$ als Wort in X dar.
- Kurze Präsentationen, d.h. das Auffinden möglichst kleiner Erzeugendensysteme
- (Konstruktive) Charakterisierung von G

Matrix Group Recognition

Für eine als Erzeugnis einer Menge X gegebenen Gruppe $G = \langle X \rangle$ sind die Aufgaben der algorithmischen Gruppentheorie u.a.:

- Wort-Problem: Stelle $g \in G$ als Wort in X dar.
- Kurze Präsentationen, d.h. das Auffinden möglichst kleiner Erzeugendensysteme
- (Konstruktive) Charakterisierung von G

Für Permutationsgruppen gibt es Algorithmen, die auch für große Grade noch effizient sind.

Matrixgruppen haben als Permutationsgruppen oft große Grade und sind oft einfach, so dass Algorithmen für Permutationsgruppen ineffizient sind.

Forschungsprojekt: **Matrix Group Recognition**

Matrizen

... treten in der reinen Mathematik in der Darstellungstheorie auf, heutzutage insbesondere in modularer Darstellungstheorie, das sind Darstellungen $\rho : * \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$

- von Gruppen,
- assoziativen Algebren,
- (modularen) Lie-Algebren oder
- anderer algebraisch strukturierter Objekte

über endlichen Körpern.

Matrizen

... treten in der angewandten Mathematik meist nur als Hilfsmittel auf, z.B.

- als Inzidenzmatrizen,
- in der Bildverarbeitung,
- in linearen Gleichungssystemen,
- in Systemen linearer Differentialgleichungen.

Für die Effizienz von Rechnungen mit großen Matrizen sind besondere Techniken nötig. Sie sind daher u.a. in der Numerik Objekte aktueller Forschung.