Mathematische Optimierung in der Praxis

Genetisch optimierte Fahrpläne und Kosten-Nutzen-Analysen für Verkehrsnetze

Von Michael Kolonko und Ophelia Engelhardt-Funke

Effizienzsteigerung des öffentlichen Verkehrs

Mathematische Optimierungsmethoden können dazu beitragen, Planung und Betrieb öffentlicher Verkehrsnetze effizienter zu gestalten. Dies wird besonders deutlich bei der Gestaltung von Fahrplänen, die gewissermaßen das Produkt darstellen, das die Verkehrsbetriebe ihren Kunden anbieten. Auch heute werden Fahrpläne noch weitgehend von Hand erstellt, meist durch Anpassen vorhandener Pläne an geänderte Randbedingungen. Eine Optimierung findet kaum statt. Am Institut für Mathematik der TU Clausthal wurde ein Programmsystem ‚HiTT' entwickelt, mit dem optimale Fahrpläne für Verkehrsnetze erstellt werden können.

Bei der Fahrplanoptimierung ist zunächst ein grundsätzliches Problem zu lösen: es gibt kein einfaches Kriterium für ‚gute' und ‚schlechte' Fahrpläne. Ein ‚guter' Fahrplan muß einerseits die Wünsche der Kunden berücksichtigen, z.B. ein möglichst reibungsloses Umsteigen ermöglichen. Andererseits wird der Betreiber des Netzes nur solche Fahrpläne als ‚gut' ansehen, die einen wirtschaftlichen Betrieb ermöglichen, z.B. wenige Fahrzeuge oder Streckeninvestitionen erfordern. Daneben sind u.U. gesetzliche oder politische Vorgaben zu berücksichtigen.

Softwareinstrumente für die Fahrplanoptimierung müssen daher in der Lage sein, eine Vielzahl verschiedener Bewertungskriterien in die Optimierung einzubeziehen. Als Ergebnis erhält man im allgemeinen keinen einzelnen, optimalen Fahrplan, sondern eine Palette sogenannter ‚Pareto-optimaler' Alternativen (nach Vilfredo Pareto, 1848 – 1923), unter denen der Planer dann eine endgültige Auswahl treffen kann, u.U. unter Heranziehung zusätzlicher, nicht-formalisierter Kriterien. Vor- und Nachteile der Fahrplanalternativen werden in unserem Programmsystem in Form einer Kosten-Nutzen-Analyse deutlich gemacht.

Für die Optimierung der Fahrpläne kommen sogenannte genetische Algorithmen zum Einsatz, die eine Art Aufzucht von Fahrplänen auf dem Rechner ermöglichen und für die Optimierung unter mehrfachen Zielsetzungen besonders geeignet sind. Der mathematische Kern des Verfahrens besteht u.a. aus einer genauen Analyse der komplexen stochastischen Abhängigkeiten in einem Verkehrsnetz und ihrer anschließenden Simulation. Verschiedene Verkehrsbetriebe und einschlägige Softwarefirmen haben bereits Interesse an dem System gezeigt.

Fahrpläne und ihre Bewertungen

Das System HiTT geht von einem festen Netz von Linien aus, auf denen Züge (oder andere Fahrzeuge) mit festen Takten verkehren. Ein Fahrplan F legt für jede Linie L die Abfahrtszeit $\pi(L,S)$ an jeder Station S und die Fahrzeit $\delta(S,S')$ bis zur nächsten Station S' fest (und damit auch die Ankunftszeit in S'). Diese Größen können bei der Optimierung also verändert werden.

Zu jedem Fahrplan F werden bis zu vier Bewertungen (Kostenfunktionen) berechnet: die Umsteigewartezeit, die erforderlichen Investitionen (Baukosten), die erforderliche Fahrzeuganzahl sowie die Robustheit unter Störungen. Diese Kostenfunktionen sollen zunächst etwas näher erläutert werden.

Beim Umsteigen von der Linie L in die Linie L' an Station S entsteht abhängig vom Fahrplan F eine gewisse Wartezeit $w_F(L,L',S)$. Die Umsteigewartezeit $W(F)$ des Fahrplans F ist die Summe der $w_F(L,L',S)$ über alle Umsteigebeziehungen (L,L',S), wobei diese Zeiten noch mit der geschätzten Anzahl der Fahrgäste gewichtet werden können. Bemerkenswert ist hierbei, daß für die Bestimmung der $w_F(L,L',S)$ die Wartezeit beim Umsteigen von einem beliebigen Zug der Linie L in den nächsten Zug der Linie L' genommen werden kann. Man kann zeigen, daß sich die Wartezeiten zwischen unterschiedlichen Zügen der Linien nur um eine Konstante unterscheiden, die nicht vom Fahrplan abhängt und daher auch nicht in die Kostenfunktion einzugehen braucht.

Selbst in sehr einfachen Netzen ist es oft nicht möglich, nur durch Abstimmung der Abfahrtszeiten der Linien die Umsteigewartezeiten beliebig zu verringern. Das Netz in **Bild 1** hat vier Linien und vier Umsteigemöglichkeiten. Die Fahrzeiten (in Min.) stehen an den Strecken; die Züge sollen im 60-Min.-Takt verkehren. Die Abfahrtszeiten in den ovalen Startstationen sind so gewählt, daß an drei der vier rechteckigen Umsteigestationen keine Wartezeiten auftreten. An der vierten Station aber treten Wartezeiten von 25 bzw. 35 Min. auf. Dies läßt sich auch durch eine andere Wahl der Abfahrtszeiten nicht vermeiden, da man zeigen kann, daß die Summe der Fahr- und Wartezeiten in einem Kreis immer ein Vielfaches der Linien-Periode ist. Hier beträgt die Fahrzeitsumme im Kreis gerade (40+55-25-45) Min. = 25 Min. Eine Verringerung läßt sich nur durch eine Verkürzung der Fahrzeit z.B. auf der gewundenen Strecke von 55 Min. auf 30 Min. erzielen.

Will man Fahrpläne mit geringen Umsteigewartezeiten erhalten, muß man daher u.U. auch die Fahrzeiten auf den Strecken verändern. Dazu sind Ausbaumaßnahmen auf den betreffenden Strecken durchzuführen, z.B. Modernisierung von Weichen oder Bahnübergängen. Für jede Strecke (S,S') des Netzes muß ein grober Katalog von möglichen Ausbaumaßnahmen mit Kostenschätzungen und den jeweils erzielbaren Fahrzeitverkürzungen vorliegen. Die für Fahrplan F ▶

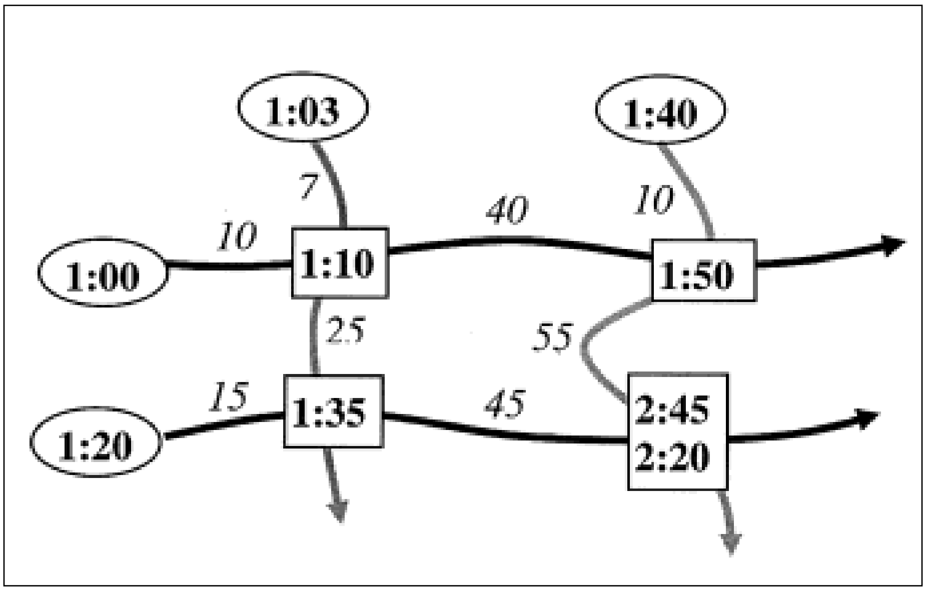

Bild 1: Umsteigen in einem einfachen Streckennetz kann sehr kompliziert sein.

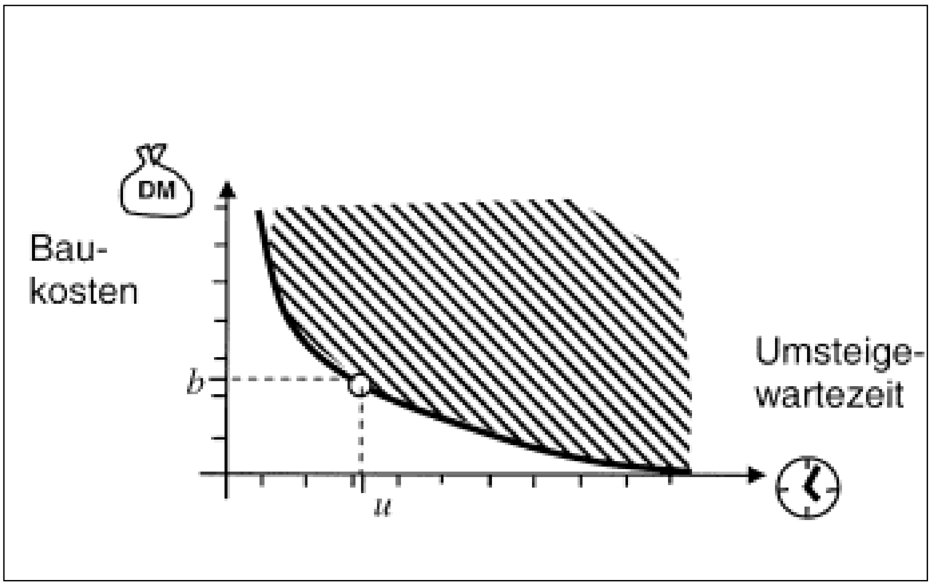

Bild 2: Die Kostenfunktionswerte der Pareto-optimalen Fahrpläne bilden eine Kosten-Nutzen-Kurve.

erforderlichen Investitionen oder **Baukosten B(*F*)** ergeben sich als die Summe über die Kosten aller Baumaßnahmen, die auf allen Strecken (<u>S, S'</u>) zum Erreichen der dort vorgesehenen Fahrzeit δ(<u>S, S'</u>) mindestens erforderlich sind.

Die **Fahrzeuganzahl U(*F*)** ergibt sich aus der minimalen Zahl von Fahrzeugumläufen, mit denen der Fahrplan unter Berücksichtigung verschiedener Nebenbedingungen (‚Wendezeiten') abgedeckt werden kann. Für dieses Teilproblem existiert eine (klassische) mathematische Lösung mittels linearer Optimierung.

Die Stabilität bzw. **Robustheit R*(F)*** eines Fahrplans *F* wird durch die mittlere Umsteigewartezeit beschrieben, die zu beobachten ist, wenn auf den Strecken und an den Stationen kleinere Verzögerungen auftreten können, wie sie für das reale Fahrgeschehen typisch sind. Fahrpläne, die eine geringe fahrplanmäßige Umsteigewartezeit *W(F)* haben, sind meist sehr empfindlich gegen derartige Störungen, da die fahrplanmäßigen Wartezeiten auch als Puffer für kleinere Verspätungen dienen. Werden diese Puffer ‚wegoptimiert', so führen bereits kleine Verspätungen dazu, daß Anschlußzüge verpaßt werden oder Anschlußzüge auf verspätetete Zubringer warten müssen und sich die Verspätung so fortpflanzen kann. Die mathematische Analyse von Verspätungen in Netzen ist außerordentlich kompliziert. Mit Hilfe der Warteschlangentheorie konnte jetzt ein vereinfachtes Modell der Verspätungsakkumulation entlang von Streckenabschnitten ermittelt werden, das es erlaubt, die tatsächlich auftretenden mittleren Umsteigewartezeiten mit wesentlich reduziertem Aufwand zu simulieren.

Optimale Fahrpläne

Ein Fahrplan *F* wird also durch (bis zu) vier Kostenfunktionen *W(F), B(F), U(F)* und *R(F)* bewertet. Diese Bewertungen sind z.T. zuwiderlaufend: Möchte man z.B. die Fahrzeuganzahl *U(F)* senken, ohne die Wartezeit *W(F)* zu erhöhen, so muß man verstärkt in den Ausbau der Strecken investieren, d.h. *B(F)* erhöhen. Unter diesen Umständen wird es i.a. keinen Fahrplan *F* geben, der alle Kostenfunktionen minimiert. Stattdessen sucht man nach den sog. **Pareto-optimalen** Lösungen. Dies sind Fahrpläne, die von keinem anderen Fahrplan in allen Kostenfunktionen unterboten werden können. Betrachtet man z.B. die beiden Bewertungskriterien Baukosten *B(F)* und Umsteigewartezeit *W(F)*, so zeigt **Bild 2** die Menge der Kostenpunkte *(W(F),B(F))* aller möglichen Fahrpläne als schraffierte Fläche. Die fett gedruckte Kurve markiert die in diesem Beispiel Pareto-optimalen Fahrpläne, zu denen es keine anderen gibt, die in beiden Koordinaten bessere Werte erzielen. Bei der Auswahl eines Fahrplans würde man sich sinnvollerweise auf Fahrpläne von dieser Kurve beschränken.

Die Kostenfunktionswerte Pareto-optimaler Fahrpläne bilden Kurven bzw. bei mehr als zwei Bewertungen Flächen, die für (mehrdimensionale) Kosten-Nutzen-Analysen benutzt werden können. In Bild 2 kann man z.B. ablesen, welche Umsteigewartezeit *u* im Netz mindestens anfällt, wenn man eine bestimmte Summe *b* in das Streckennetz investiert. Ein Pareto-optimaler Fahrplan mit Baukosten 0 liefert also z.B. minimale Wartezeit ohne zusätzliche Investitionen. Um-

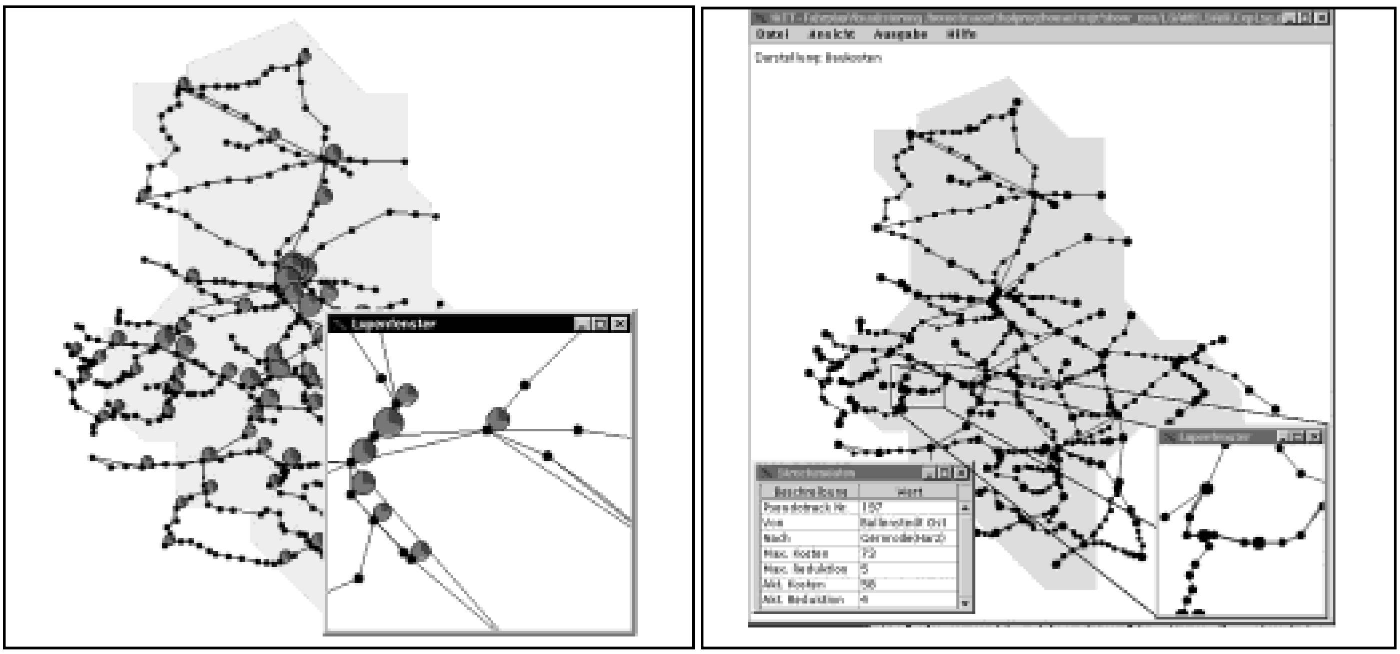

Bild 3: Für jeden Fahrplan kann die Aufteilung der Umsteigewartezeiten (links) und die erforderlichen Baumaßnahmen (rechts) angezeigt werden.

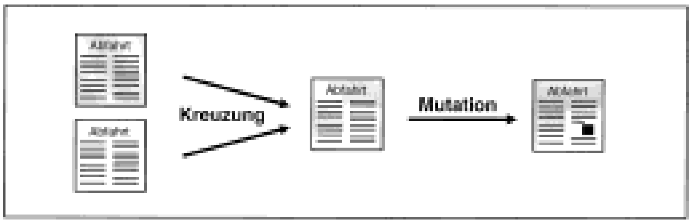

Bild 4: Zur Erzeugung von ‚Nachkommen' werden zwei zufällig ausgewählte Fahrpläne zu einem neuen Fahrplan rekombiniert und einer kleinen zufälligen Änderung unterworfen.

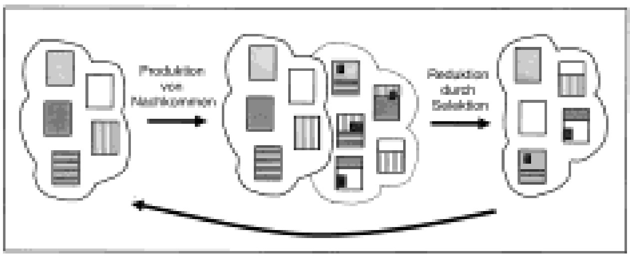

Bild 5: Eine zufällig erstellte Startpopulation von Fahrplänen wird durch Zyklen von Produktion und Reduktion verbessert.

gekehrt kann man ablesen, wieviel es kostet, eine bestimmte obere Schranke an Wartezeit nicht zu überschreiten oder sogar eine Gesamtwartezeit 0 zu erreichen (der sog. Integrale Taktfahrplan).

Unser Programmsystem HiTT berechnet näherungsweise Pareto-optimale Fahrpläne und bereitet die Ergebnisse so auf, daß die Wartezeiten an den Stationen und die erforderlichen Baumaßnahmen genau abzulesen sind; **Bild 3** zeigt hierzu einen Bildschirmausschnitt. Dabei beobachtet man häufig, daß sich die optimale Allokation der Baumaßnahmen im Netz bei einer geringfügigen Änderung der Gesamtinvestitionssumme stark verändert. Diese durch die Netzstruktur und die Periodizität der Linien hervorgerufenen Unstetigkeiten können von menschlichen Planern kaum erkannt werden.

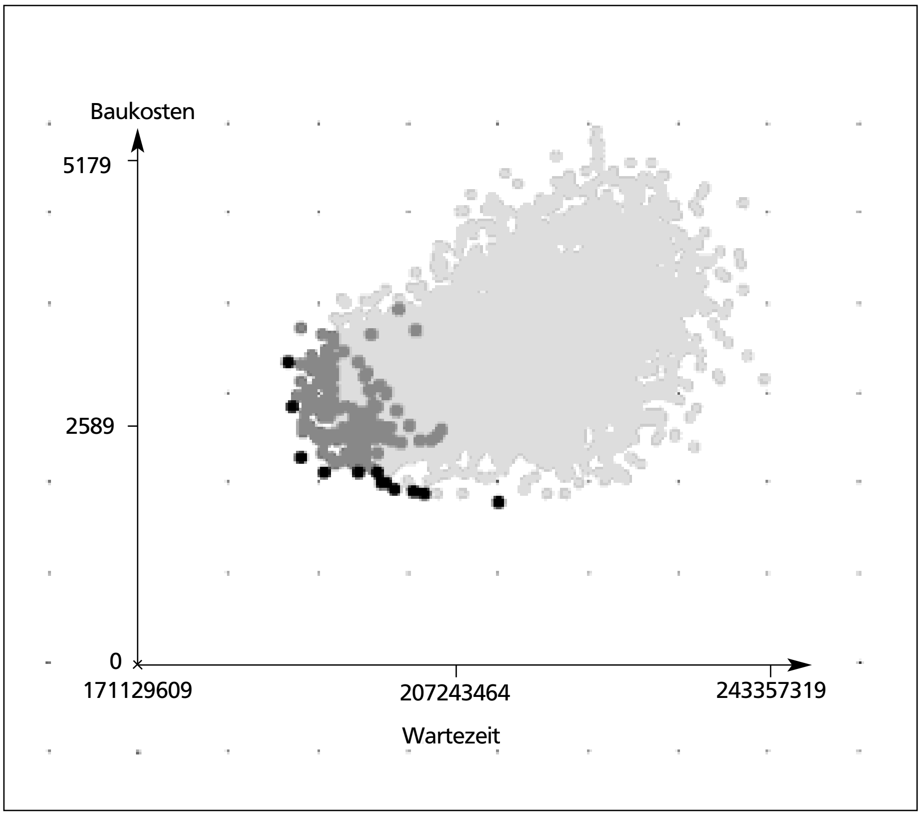

Bild 6: Die Entwicklung der Population kann am Bildschirm verfolgt werden.

Optimierung mit Genetischen Algorithmen

Die Berechnung der Pareto-optimalen Fahrpläne ist außerordentlich komplex und mit klassischen mathematischen Methoden wie z.B. linearer oder konvexer Optimierung kaum zu bewältigen. Diese Verfahren sind insbesondere dann nicht mehr einsetzbar, wenn Teile der Kostenfunktionen, wie bei der Wartezeit unter Störungen, nur simuliert werden können. In dem Programmsystem HiTT werden für die Optimierung moderne Methoden des sog. soft-computing, vor allem genetische Algorithmen eingesetzt.

Genetische Algorithmen sind der biologischen Evolution nachempfunden. Eine ‚Population' von Fahrplänen wird auf dem Rechner erzeugt und iterativ verbessert. Dazu werden durch Kreuzung und Mutation von Fahrplänen ‚Nachkommen', d.h. neue Fahrpläne erzeugt, die einige Eigenschaften ihrer ‚Eltern' erben. Eine Kreuzung zweier Fahrpläne F_1, F_2 kann z.B. so aussehen, daß für eine zufällig gewählte Zahl von Stationen Fahrplan F_1 benutzt wird und für den Rest der Stationen Fahrplan F_2. Eine kleine zufällige Änderung einiger Abfahrts- und Fahrzeiten stellt eine Mutation dar (vgl. **Bild 4**). Die durch die Nachkommen vergrößerte Population wird nun einer Selektion unterworfen, an deren Ende wieder eine Population der ursprünglichen Größe steht. Dazu werden diejenigen Fahrpläne ausgewählt, die bezüglich der Bewertungskriterien gute Werte erzielen (Selektion der ‚fittesten'). Diese Population wird nun als Ausgangspunkt für die Produktion neuer Nachkommen benutzt. Beginnend mit einer Population von zufällig ausgewählten Fahrplänen, setzen sich so nach einer gewissen Anzahl von ‚Generationen' gute Fahrpläne durch (vgl. **Bild 5**).

Die gleichmäßige Berücksichtigung der verschiedenen Bewertungskriterien wird durch eine flexible Wahl der ‚Fitneß'funktion erreicht, durch die die Richtung des Selektionsdrucks gesteuert wird. Gleichzeitig kann dadurch erreicht werden, daß die von der Population gebildete Punktwolke sich auf möglichst breiter Front gegen den Nullpunkt bewegt, um so eine möglichst gute Approximation der Pareto-optimalen Fläche zu erzielen.

In dem Programmsystem HiTT kann dieser Vorgang graphisch veranschaulicht werden. Dabei werden die Kostenfunktionspunkte der Population als eine mehrdimensionale Wolke von Punkten in dem durch Kostenfunktionen bestimmten Raum dargestellt. In **Bild 6** wird die Entwicklung von Umsteigewartezeit und Baukosten gezeigt. Die hellgrauen Punkte gehören zu Fahrplänen, die bereits in früheren Generationen nicht ‚überlebt' haben. Die dunkelgrauen Punkte gehören zu den Fahrplänen der aktuellen Population, während die schwarzen Punkte die aktuell ‚Pareto-besten' Fahrpläne markieren. Durch wiederholte Programmläufe kann so eine breite Front von Pareto-optimalen Fahrplänen erzeugt werden.

Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem hier beschriebenen Instrument können Fahrpläne für Verkehrsnetze auf einem relativ abstrakten Planungslevel (d.h. ohne Berücksichtigung der genauen Streckenführung etc.) berechnet werden. Weitere Kostenfunktionen können ohne weiteres hinzugefügt werden. Die zum Einsatz kommenden modernen Optimierungsverfahren sind in der Lage, auch sehr komplexe Probleme, z.B. mit mehrdimensionalen Zielsetzungen, zu behandeln.

Dieses Projekt ist gleichzeitig typisch für die Arbeit in dem Studiengang **Wirtschaftsmathematik**, in dem Mathematik, Informatik und Wirtschaftswissenschaften kombiniert werden. Grundkenntnisse des Anwendungsbereichs (hier Verkehrswesen) werden benötigt für das Verständnis der Fragestellung und für die Identifizierung relevanter Parameter. Vertiefte Kenntnisse der angewandten Mathematik ermöglichen die Formulierung eines adäquaten mathematischen Modells und die Auswahl geeigneter Algorithmen. Die praktische Umsetzung auf dem Rechner erfordert schließlich Kenntnisse der modernen Methoden der Informatik.

Prof. Dr. rer.nat. Michael Kolonko
Dipl.-Math. Ophelia Engelhardt-Funke
Institut für Mathematik
Erzstraße 1
38678 Clausthal-Zellerfeld
Tel.: 05323/72-2410 (Kolonko)
05323/72-2419 (Engelhardt-Funke)
Fax: 05323/72-2304