

# Explosion der Möglichkeiten



Foto: Shutterstock

Am 14. August beginnt die neue Saison der Fußball-Bundesliga. **Für den Spielplan gibt es mehr Möglichkeiten als Teilchen im Universum.** Stephan Westphal hat eine Software geschrieben, die trotzdem eine fast optimale Lösung findet.

INTERVIEW: GREGOR HONSEL

**TECHNOLOGY REVIEW:** Herr Westphal, 18 Vereine müssen irgendwie gegeneinander spielen, das klingt überschaubar. Wozu braucht man da eine mathematische Optimierung?

**STEPHAN WESTPHAL:** Es gibt bei 18 Mannschaften bereits mehr mögliche Spielpläne als Teile im Universum. Nehmen wir zum Beispiel einfach den Spielplan des letzten Jahres und vertauschen darin die Mannschaften. Dann habe ich für die erste Mannschaft 18 Möglichkeiten, für die zweite noch 17 und so weiter. Allein das ergibt 18 Fakultät Möglichkeiten. Das sind  $6,4 \text{ mal } 10^{15}$ . Jetzt kann ich mir noch aussuchen, mit welchem der 17 Spieltage ich die Saison beginnen möchte und ob ich den Spielplan dann in der gleichen Reihenfolge wie vorher spielen möchte oder rückwärts. Das sind wieder zwei Möglichkeiten. Jetzt könnte ich noch das Heimrecht bei allen Spielen tauschen, was mir wieder zwei verschiedene Möglichkeiten einräumt. Schließlich können Sie auch noch die einzelnen Spieltage hin und her tauschen. Und wenn man sich jetzt noch ein bisschen mehr Mühe gibt und weitere Optionen hinzuzieht, kommt man ruck, zuck auf eine Größe von  $10^{80}$ .

**Wie wurde es denn früher gemacht, ohne Computer?**

Im Wesentlichen so wie bei einem Blitzschachturnier: An einer Tischreihe spielt jeder gegen den, der ihm gegenüber sitzt. Nach jedem Zug rutschen alle einen Stuhl weiter. Es gab für Spielplaner ein Buch, wo solche Spielpläne exemplarisch drinstanden. Dann brauchten sie nur noch die Platzhalter mit den entsprechenden Mannschaften zu besetzen.

**Und wo war dabei das Problem?**

Mittlerweile haben wir sehr viele Nebenbedingungen. In den Stadien finden zum Beispiel deutlich mehr große Konzerte und andere Veranstaltungen statt. Zudem sollte jede Mannschaft abwechselnd zu Hause und auswärts spielen. Es gibt auch Paare von Mannschaften, die nicht gleichzeitig zu Hause spielen

sollten. Dazu kommen noch dramaturgische Kriterien wie ein besonders tolles Eröffnungsspiel oder ein gelungener Saisonabschluss. Außerdem sollen alle Mannschaften den Spielplan als fair empfinden. Der Aufsteiger sollte also beispielsweise nicht gleich zu Beginn dreimal hintereinander gegen starke Mannschaften spielen müssen. Wenn Sie nur mit einem einzigen Spielplan antreten und jedes Jahr nur die Mannschaften austauschen, kommen Sie da ziemlich schnell an Ihre Grenzen.

**Also haben Sie den Computer zu Rate gezogen.**

Genau. Die DFL verwendet computergenerierte Spielpläne etwa seit Mitte der 2000er. Ich habe das Projekt 2008 übernommen und zwei Jahre später ein ganz neues Modell eingesetzt, mit dem es nun möglich ist, mehr Wünsche zu erfüllen, zum Beispiel können mehr andere Veranstaltungen in den Stadien abgehalten werden. Das Entscheidende sind aber natürlich ausgeglichene Spielpläne. Wir können mit Fug und Recht behaupten, dass wir aus der Menge aller denkbaren Spielpläne den besten aussuchen können – oder zumindest einen, der bis auf 0,3 Prozent optimal ist.

**Auch der Computer macht also nicht alle wunschlos glücklich?**

Nein. Fast alle Mannschaften haben zum Beispiel zwei Heim- oder zwei Auswärtsspiele nacheinander. So etwas lässt sich nicht vermeiden, das kann man auch beweisen. Die Wünsche stehen manchmal auch direkt im Konflikt zueinander. Für jeden nicht erfüllten Wunsch vergibt das Programm Strafpunkte. Der Plan mit den wenigsten Strafpunkten ist der beste. Das Schöne an dem Algorithmus ist, dass er einem gleichzeitig auch eine untere Schranke angibt. Wenn der bisher beste Plan beispielsweise zwei Millionen Strafpunkte hat, erfahre ich gleichzeitig auch: Einen besseren Plan als 1,95 Millionen gibt es gar nicht. Man hat also die Gewissheit: Dieser Plan ist bis auf so und so viel Prozent optimal. Jetzt kann man entweder abbrechen und sagen: Danke, das reicht. Oder den Rechner weitersuchen lassen, vielleicht kommt er ja noch auf 1,98 Millionen.



Foto: TU Clausthal

**STEPHAN WESTPHAL,** 38, ist Professor an der TU Clausthal in der Arbeitsgruppe „Diskrete Optimierung“. Er hat in Kaiserslautern über Online-Routenplanung und Maschineneinsatzplanung promoviert und danach als Berater für ein Unternehmen gearbeitet, das mathematische Optimierungssoftware herstellt. Einer der Kunden war die Deutsche Fußball Liga (DFL). So kam er in Kontakt mit der Sportbranche. Seitdem berät Westphal die DFL, die Basketball-Bundesliga und die Deutsche Eishockey Liga bei der Spielplangestaltung.

**Wie funktioniert nun Ihr Algorithmus?**

Mit Methoden der ganzzahligen linearen Optimierung. Das heißt, wir haben das Spielplanungsproblem als ein Gleichungssystem mit insgesamt ungefähr zehntausend Variablen formuliert. Sie können entweder den Wert 0 oder 1 annehmen und geben zum Beispiel an, ob eine Mannschaft ein Heimspiel hat. Jede Lösung dieses Gleichungssystems ergibt einen zulässigen Spielplan. Jetzt denkt man erst mal: Gut, dann übergibt man dieses Gleichungssystem irgendeiner Software, die löst es dann. Aber das funktioniert in der Regel nicht, weil Probleme dieser Art für die Standardverfahren schlicht zu schwer sind. Wir haben diesen Effekt, den wir kombinatorische Explosion nennen. Mit mehr Optionen steigt die Rechenzeit exponentiell.

**Warum nicht einfach die Rechenleistung erhöhen?**

Weil diese Kombinatorik wirklich tückisch ist. Schon wenn ich nur zwei Mannschaften dazunehme, bräuchte ich einen Rechner, der hundertmal so schnell ist.

**Und wie sieht Ihre Lösung aus?**

Eine gute Idee reduziert das Problem auf ein Millionstel seiner ursprünglichen Größe. Wenn eine Mannschaft zum Beispiel an zwei aufeinanderfolgenden Spieltagen ein Heimspiel hat, muss es eine andere Mannschaft geben, die an genau diesen beiden Tagen ein Auswärtsspiel hat. Ich habe mir also darüber Gedanken gemacht, welche von diesen Heim-Auswärts-Mustern überhaupt zusammenpassen. So konnte ich viele Lösungsräume gleich als uninteressant markieren. Es ist wie bei einem Riesen-Heuhaufen mit einer Nadel drin: Ich zerschneide den Heuhaufen und sage dem Rechner: Pass mal auf, in der linken Hälfte kann nichts sein, da brauchst du gar nicht erst zu suchen.

**Wie sieht das in der Praxis aus? Bekommen Sie die ganzen Wünsche und Bedingungen von den Vereinen und Stadionbetreibern mitgeteilt?**

Nein, die Deutsche Fußball Liga macht das selbst. Dazu habe ich ihr eigens eine Software entwickelt, in der die Spielplaner alle Wünsche eintragen können. Sie können auch mit einer Punktzahl angeben, wie viel ihnen ein Wunsch wert ist. Die Software läuft auf einem handelsüblichen Laptop. Meist hat man nach einer überschaubaren Rechenzeit die ersten Pläne. Dann schauen sich die Leute von der DFL den Spielplan noch einmal an. Anschließend können sie ihn mit ihrer Erfahrung gewichten, kalibrieren und nachjustieren – etwa um eine gewisse Dramaturgie oder Emotionalität einzubringen. Man kann ja nicht alles im Computer modellieren.

**Lässt sich Ihre Optimierung auf andere, nicht-sportliche Bereiche übertragen?**

Nicht direkt. Verfahren dieser Art werden zwar in sehr vielen Bereichen der Produktion, der Logistik und der Telekommunikation eingesetzt. Das Typische daran ist aber eigentlich immer, dass man für jedes spezielle Problem den einen Trick finden muss, damit die Computer die besten Lösungen auch finden können. Man braucht dazu gesunden Menschenverstand, Fantasie, ein bisschen Kreativität und Erfahrung.